

ریاضیات و آمار مقدماتی

بخش اول: اصل سوالات ریاضیات و آمار مقدماتی (برگزار شده توسط سازمان سنجش)

۱- حاصل $\sqrt[3]{0.5}(\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + 1)$ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۱

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\sqrt[3]{0.5} = \sqrt[3]{1/2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} * (\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1} + 1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2})} = \frac{2 + \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2}}{2 + \sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2}} = 1$$

۲- حاصل $\sqrt[8]{9^5 \sqrt{3}} (\sqrt[8]{27} \div \sqrt[5]{9})$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

- (۱) $\sqrt[6]{3}$ (۲) $\sqrt[5]{3}$ (۳) $\sqrt[8]{3}$ (۴) $\sqrt[4]{3}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$I = 3^{\frac{3}{8}} \times 3^{-\frac{2}{5}} \times 3^{\frac{11}{40}} = 3^{\frac{15-16+11}{40}} = 3^{\frac{10}{40}} = 3^{\frac{1}{4}} = I = \sqrt[4]{3}$$

۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 3 + 2[-\frac{x}{2}] & x > 0 \\ 7 - \frac{[x^2-3]}{11} & x \leq 0 \end{cases}$ باشد مقدار $f(2)f(5)$ کدام است؟ ([] : تابع جز صحیح می باشد). (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

- (۱) $\frac{76}{11}$ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) $\frac{71}{11}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$F(5) = 3 + 2[-5/2] = 3 + 2*(-3) = -3$$

$$F(2f(5)) = f(-6) = 7 - \frac{[36-3]}{11} = 7 - 33/11 = 4$$

۴- خانواده‌ای دارای سه فرزند دختر است. احتمال اینکه فرزند چهارم پسر باشد، کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{16} \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد. تولد فرزند چهارم ارتباطی و تاثیری از فرزندهای دیگر ندارد و مستقل است.

۵- حاصل $\sqrt{0/14 + \sqrt{0/016}} - \sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)\left(\frac{56}{1920}\right)}$ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$0/2 \text{ (۴)}$$

$$0/3 \text{ (۳)}$$

$$0/4 \text{ (۲)}$$

$$0/1 \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sqrt{0/14 + \sqrt{0/016}} - \sqrt{\frac{24}{7} * \frac{56}{1920}} &= \sqrt{\frac{14}{100} + \frac{4}{10\sqrt{10}}} - \sqrt{\frac{24}{7} * \frac{8*7}{24*80}} = \\ \frac{1}{10}(\sqrt{14 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{10}) &= \frac{1}{10}(\sqrt{14 + 4 * 3.3} - \sqrt{3.3}) = \frac{1}{10} * 2 = \frac{2}{10} \end{aligned}$$

۶- طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، اگر محیط این مثلث ۴۸ واحد باشد، مساحت مثلث بر حسب واحد مربع کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

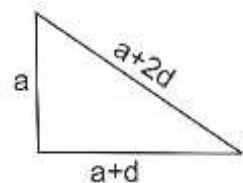
$$۱۲۰ \text{ (۴)}$$

$$۹۶ \text{ (۳)}$$

$$۷۲ \text{ (۲)}$$

$$۵۴ \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$a + a + d + a + 2d = 48$$

$$\rightarrow (a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2 \rightarrow a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{2d \pm 4d}{2} \text{ حل معادله درجه دوم}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 3d \rightarrow d = 4, a = 12 \\ a = -d \rightarrow 0 = 16 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$s = \frac{1}{2}a(a + d) = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$$

۷- در یک دنباله حسابی جمله اول و قدر نسبت با هم برابرند. اگر جمله ششم ۳۰ باشد، مجموع بیست جمله اول این دنباله کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

(۴) ۱۰۰۰

(۳) ۱۰۵۰

(۲) ۱۱۰۰

(۱) ۱۱۵۰

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد. اگر جمله اول برابر با a و قدر نسبت برابر با d باشد، آنگاه $a = d$.

$$a_6 = 30$$

$$\Rightarrow a + 5d = 30$$

$$\Rightarrow 6a = 30$$

$$\Rightarrow a = 5, d = 5$$

مجموعه ۲۰ جمله‌ای اول برابر است با:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = a + (a + d) + \dots + (a + 19d) = 20a + \frac{(1 + 19) \times 19}{2} d = 20a + 190d$$

با جایگذاری $a = d = 5$ در تساوی بالا:

$$(20 \times 5) + (190 \times 5) = 1050$$

۸- حاصل عبارت $\sqrt{5} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{5 + \sqrt{22 + \sqrt{5}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{22 + \sqrt{5}}}$ کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

(۴) $5 + \sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$

(۱) ۵

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{5 + \sqrt{22 + \sqrt{5}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{22 + \sqrt{5}}} &= \sqrt{5} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{25 - (22 + \sqrt{5})} = \sqrt{5} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{5} \times \sqrt{9 - 5} \\ &= \sqrt{5} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

۹- تعداد اعضای کدام مجموعه بیشتر است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x}{x^2 - 3} = 1\} \quad (۲)$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2 + 1} = 1\} \quad (۱)$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2 - 3} = 1\} \quad (۴)$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x}{x^2 + 1} = -1\} \quad (۳)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد. اگر در هریک از گزینه های ۱ و ۳ و ۴ معادلات را حل کنیم به حالتی می‌رسیم که هیچ مجموعه جوابی ندارد برای مثال گزینه ۱ را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2 + 1} = 1 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

جواب برای x نیست

$$\frac{2x}{x^2 - 3} = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ و } 3 \in \mathbb{N} \quad \text{فقط گزینه ۲ یک جواب دارد}$$

۱۰- با حروف کلمه آموزش چند کلمه پنج حرفی می توان ساخت به طوری که حرف "و" حرف وسط کلمه باشد؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۹۶ (۳) ۵۴ (۴) ۲۴

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{1}{-} \times \frac{2}{-} \times \frac{1}{-} = 24 \quad \text{طبق اصل شمارش خواهیم داشت}$$

۱۱- در دسته بندی اعداد زوج به صورت... (۱۲, ۱۰, ۸), (۶, ۴), (۲), آخرین عدد در دسته پانزدهم، کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۴۲ (۳) ۲۴۴ (۴) ۲۳۸

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: پاسخ صحیح گزینه ۱ می باشد. فرض کنیم a_n آخرین دسته n باشد پس داریم:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2+4 \quad a_3 = 2+4+6 \quad \dots \quad a_{15} = 2+4+6+\dots+30 = 2(1+2+3+\dots+15) = 2 \times \frac{15 \times 16}{2} = 240$$

۱۲- واریانس داده های ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۵۹ و ۱۲۵۷، کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۲.۵ (۴) ۳.۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\text{طبق فرمول واریانس که } \frac{\sum x_i^2 - x^2}{n} \text{ پس } \frac{1+1+4+0+4}{5} = 2 \text{ خواهد بود.}$$

۱۳- طول بردار $(-4, 3, 0)$ کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۷

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد. طول بردار مذکور به صورت زیر محاسبه می شود:

$$|(-4, 3, 0)| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

۱۴- دو خط $3x - 4by = 5$ و $ax + 3y = 10$ در نقطه $A(K, 2)$ بر هم عمودند. اگر نقطه A در ناحیه دوم باشد، مقدار ab کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

$$\frac{1}{3} (۴)$$

$$۴ (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$۳ (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} 3x - 4by = 5 \\ ax + 3y = 10 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{3a}{4b}\right) \left(-\frac{a}{3}\right) \rightarrow a=4b$$

حاصلضرب شیب S در فرمول بالا را ۱- در نظر میگیریم.

$$\begin{cases} 3k - 8b = 5 \\ ak + 6 = 10 \end{cases} \rightarrow \text{حل دستگاه} \rightarrow a=-4, a=3/2$$

چون $A(K, 2)$ در ناحیه دوم است پس $K < 0$ و $a < 0$ پس $a = -4$ و چون $a = 4b$ پس $b = -1$ و $ab = 4$ می باشد.

۱۵- محیط یک مستطیل ۸۰ واحد است. اگر از طول آن ۶ واحد کم کنیم یک مربع حاصل می شود. اندازه ضلع بزرگ مستطیل کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

$$۲۹ (۴)$$

$$۲۳ (۳)$$

$$۱۷ (۲)$$

$$۱۱ (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد. فرض کنیم طول مستطیل برابر با a و عرض آن برابر با b باشد. در این صورت طبق فرض های مسئله داریم:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 80 \\ b = a - 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 40 \Rightarrow a + a - 6 = 40 \Rightarrow 2a = 46 \Rightarrow a = 23$$

۱۶- اگر A و B، دو مجموعه غیر تهی باشند، $(B'-A)'$ با کدام مجموعه، برابر است؟ (تأمین اجتماعی)

$$B \cup A' (۴)$$

$$B \cup A (۳)$$

$$B \cap A' (۲)$$

$$B' \cap A' (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۷- برای چند مقدار m ریشه های حقیقی معادله $(2m - 3)x^2 + (m^2 - 4)x - 4 = 0$ قرینه اند؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

$$۳ (۴)$$

$$۲ (۳)$$

$$۱ (۲)$$

$$(۱) \text{ هیچ مقدار } m$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

مجموع ریشه صفرها است
ضرب ریشه منفیها است
معادله دو ریشه دارد

اگر ریشه قرینه‌ها باشند

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow m^2 = 4 = 0 \rightarrow m = \pm 2$$

$$\begin{cases} m = -2 \rightarrow -7x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-4}{-7} & \text{غ ق ق} \\ m = 2 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m = \pm 2$ شرایط مسئله برقرار است

۱۸- جامعه آماری با ۱۵ داده به صورت زیر، دسته بندی شده است. میانگین جامعه کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

دسته‌ها	۱۱-۷	۱۵-۱۱	۱۹-۱۵	۲۳-۱۹
فراوانی	۴	۵	۲	۴

۱۵.۹ (۴)

۱۴.۶ (۳)

۱۳.۹ (۲)

۱۲.۶ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مرکز دسته‌ها به ترتیب از چپ به راست می‌شود ۹ و ۱۳ و ۱۷ و ۲۱ پس:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{9 \times 4 + 13 \times 5 + 17 \times 2 + 21 \times 4}{15} = 14.6$$

۱۹- اگر $2x - 3$ و \sqrt{x} سه جمله اول یک دنباله هندسی باشد، جمله دهم چند برابر جمله هفتم است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$2\sqrt{2}$ (۴)

3 (۳)

2 (۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

بنابر خاصیت تصاعد هندسی داریم:

$$(\sqrt{x})^2 = x(2x - 3) \xrightarrow{\text{از حل معادله}} x = 2$$

$$q = \sqrt{2} \text{ و } q_1 = 1 \quad \text{یعنی} \quad 1 \text{ و } \sqrt{2} \text{ و } 2$$

بنابراین جملات تصاعد عبارتند از:

$$\begin{cases} q_7 = 1(\sqrt{2})^{7-1} = (\sqrt{2})^6 \\ q_{10} = 1(\sqrt{2})^{10-1} = (\sqrt{2})^9 \end{cases}$$

لذا:

$$\frac{q_{10}}{q_7} = \frac{(\sqrt{2})^9}{(\sqrt{2})^6} = 2\sqrt{2}$$

۲۰- انتهای کمان x در ناحیه سوم مثلثاتی و $\cos x = \sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{1 + \cot^2 x}$ است. اگر $\sin x = a$ باشد، مقدار I کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

$$2a \quad (۱) \quad -\frac{a^2+1}{a} \quad (۲) \quad 2\sqrt{1+a^2} \quad (۳) \quad -\frac{a^2-1}{a} \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sqrt{1 + 2\sin^2 x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}$$

با توجه به اینکه کمان x در ناحیه سوم است بنابراین $\sin x$ و $\cos x$ هر دو منفی می باشند لذا خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{\sin x} - (\sin x + \cos x) + \cos x = -\frac{1}{\sin x} - \sin x = -\frac{1}{a} - a = -\frac{a^2 + 1}{a}$$

۲۱- منحنی تابع $y = x^2 + a$ دو واحد به سمت راست محور x ها منتقل شده و خط $y = x - 1$ را در نقاطی با طول صحیح و منفی قطع می کند. بیشترین مقدار a کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

$$1 \quad (۱) \quad -2 \quad (۲) \quad 2 \quad (۳) \quad -1 \quad (۴)$$

• پاسخ: ؟ صورت سوال غلط می باشد.

۲۲- اگر (32-40)، حدود دسته سوم جدول فراوانی با ۵ دسته باشد، مرکز دسته دوم کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$30 \quad (۱) \quad 28 \quad (۲) \quad 26 \quad (۳) \quad 24 \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

طول دسته برابر $40 - 32 = 8$ و فاصله دسته قبل $32 - 24 = 8$ خواهد بود لذا

$$\text{مرکز دسته دوم} = \frac{24 + 32}{2} = 28$$

۲۳- مربع مجموع دو عدد مثبت، از مجموع مربعات آن دو عدد، ۱۰۸ واحد بیشتر است. اگر اختلاف دو عدد ۳ باشد مجموع ارقام حاصلضرب این دو عدد کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$15 \quad (۱) \quad 7 \quad (۲) \quad 9 \quad (۳) \quad 12 \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد. اگر دو عدد را a و b فرض کنیم

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 108 \xrightarrow{\text{ساده سازی}} ab = 54 \quad (*)$$

با جایگذاری در (*) خواهیم داشت و $a = 3 + b$ و $a - b = 3$ از سویی

$$(3 + b) * b = 54 \rightarrow b^2 + 3b - 54 = 0 \quad \xrightarrow{\text{پس از حل}} \quad b = 6$$

از خود (*) واضح است که $ab = 54$ و $9 = 5 + 4$ می باشد $\rightarrow a = 9$

۲۴- تعداد جواب های نامعادله $|x - x^3| \leq x$ در مجموعه اعداد طبیعی، کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$|x - x^3| \leq x$$

$$\rightarrow x^3 \leq 2x, x^2 \leq 2x^3 - x \leq x \quad \text{داریم } x \geq 2$$

با شرط $x \geq 2$ جواب ندارد پس تنها جواب $x = 1$ می باشد.

۲۵- اگر A و B، به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح باشند، مجموعه $A \triangle B$ کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

{1,2,3,...} (۴) {0,1,2,3,...} (۳) {...,-2,-1,0} (۲) {...,-2,-1} (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (-\infty, 0)$$

۲۶. اگر α و β ریشه های معادله $X^2 - 7X + 2 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha^2 - (5\alpha + 3)\beta^2 - \beta^5 + 3)$ کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$(\alpha^2 - 5\alpha + 3)(\beta^2 - 5\beta + 3)$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta)^2 - 5\alpha^2\beta + 2\alpha^2 - 5\alpha\beta^2 + 25\alpha\beta - 15\alpha + 3\beta^2 - 15\beta + 9$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta)^2 - 5\alpha\beta(\alpha + \beta) + 25\alpha\beta - 15(\alpha + \beta) + 3((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 9$$

$$\alpha\beta = 2, \alpha + \beta = 7$$

$$= 4 - 5(2)(7) + 25(2) - 15(7) + 3(49 - 4) + 9 = 4 - 70 + 50 - 105 + 135 + 9 = 23$$

۲۷- با ارقام ۷، ۷، ۷، ۷، ۳، ۷، ۷، ۷، ۵، ۷ و ۳، چند عدد دوازده رقمی می توان نوشت؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

۱۳۲. (۱)

५५. (२

۲۳. (۳

۲۶۴. (۴

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\frac{12!}{9!2!} = \frac{12*11*10}{2} = 660$$

۲۸- کدام متغیر، کیفی ترتیبی است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۱) رنگ ها

(۲) دوران تحصیل

(۳) گروه خونی

(۴) شدت زلزله

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۲۹- در یک خانواده ۵ فرزندی، با کدام احتمال، تعداد دخترها بیشتر از پسرهاست؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

$$\frac{15}{32} (1)$$
$$\frac{5}{16} (2$$
 $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (f)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\begin{pmatrix} 5 \text{ دختر} \\ 0 \text{ پسر} \end{pmatrix}$$

$$\frac{15}{32} = \frac{1}{2}$$

۳۰- در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده‌ها کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	مرکز دسته
۸۰	۶۸	۴۴	۲۴	۸	فراوانی تجمعی

٢٤/٨ (١)

27/1 (2

۲۷/۲ (۳

۲۶/۷ (۴

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه صحیح ۳ می باشد.

$$\bar{x} = \frac{\sum fxi}{\sum xi} = \frac{25*8 + 26*16 + 27*20 + 28*24 + 29*12}{80} = 27/2$$

۳۱- اگر مجموعه‌های $B-A$ و C طوری باشند که $A \subseteq B - C$ ، در این صورت مجموعه $C-A$ با کدامیک از مجموعه‌های زیر، به طور قطع برابر است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

- (۱) $C \triangle A$ (۲) $B - A$ (۳) $C \cap A$ (۴) C

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۳۲- تعداد ریشه‌های معادله $1 - \frac{1}{1+\frac{x}{x-1}} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{4x^2-1}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ندارد

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$1 - \frac{1}{\frac{2x-1}{x-1}} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{4x^2-1} \rightarrow \frac{6x^2-x}{4x^2-1} = \frac{4x-1}{4x^2-1}$$

$$\rightarrow 6x^2 - x = 4x - 1 \rightarrow x_1: x_2 = \frac{5 \pm 1}{12} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{3}$$

$x = \frac{1}{2}$ چون جزو دامنه تابع نیست مورد قبول نیست

$x = \frac{1}{3}$ مورد قبول می‌باشد، بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

۳۳- به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله $y = 3x^2 + mx + 1$ همواره بالای سهمی به معادله $y = 2x^2 + x - 2$ قرار دارد؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

(۱) $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$ (۲) $-2 < m < 2$

(۳) $-3 < m < 3$ (۴) $1 - 3\sqrt{2} < m < 1 + 3\sqrt{2}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

بایستی $3x^2 + mx + 1 > 2x^2 + x - 2$ یعنی $x^2 + (m-1)x + 3 > 0$

همواره منفی باشد Δ تعیین علامت می‌کنیم کافی است مثبت یا همان

$\Delta < 0 \rightarrow (m-1)^2 - 12 < 0$ $\xrightarrow{\text{حل و ساده سازی}} 1 - 2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3} + 1$

۳۴- واریانس داده‌های ۱۲۹۹، ۱۳۰۴، ۱۳۰۳، ۱۳۰۷، ۱۳۰۲ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) ۴.۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$\bar{X} = 1303$ طبق فرمول واریانس که $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ می باشد. داده ها را جایگذاری می کنیم

پس:

$$\frac{\sum (x_i - 1303)^2}{5} = \dots\dots\dots = 6.8$$

۳۵- اگر $A = \{n \in \mathbb{N} | n^2 \leq 7\}$ و $B = \{m \in \mathbb{Z} | [m] = 4\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ دارای چند عضو است؟ $[0]$ تابع جزء صحیح است. (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) عضوی ندارد. (۲) بی شمار (۳) ۳ (۴) ۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۳۶- کلاس A دارای ۵ ردیف صندلی است، به طوری که به جز ردیف اول که ۴ صندلی دارد، سایر ردیف ها دارای ۷ صندلی هستند. با فرض خالی بودن همه صندلی ها، احتمال اینکه احمد، ردیف اول را برای نشستن انتخاب نکند، کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$A \text{ احتمال پیشامد } = \frac{28}{4 + 28} = \frac{7}{8}$$

۳۷- اگر ماتریس A، معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه درایه a_{22} کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -۲

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

طبق قاعده محاسبه ماتریس معکوس، عضو a_{ij} از ماتریس A^{-1} می شود $\frac{a_{ji}}{|A|}$ یعنی:

$$\frac{(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{(-1)(2) + 0 + 3(0)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

۳۸- مجموع ریشه های صحیح معادله $\frac{1}{x^2-2x-2} - \frac{1}{x^2-2x-5} = \frac{3}{2}$ ، کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{-3}{(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 5)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{مخرج مشترک گرفته و ساده می کنیم}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 5) = -2 \rightarrow ab = -2 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \text{ و } b = 1 \\ \text{یا} \\ a = 1 \text{ و } b = -2 \end{cases}$$

اگر $a = -2$ لذا $x^2 - 2x - 2$ و از آنجا $x = 0$ می شود که پس از آن مقدار $x^2 - 2x - 5$ یا همان b مینیمم نمی شود

اگر $b = -2$ لذا $x^2 - 2x - 5$ و از آنجا $x = 3$ و $x = 1$ می شود که پس از آن مقدار $x^2 - 2x - 2$ یا همان a مینیمم می شود پس ریشه ها

۳ و ۱- هستند که $2 = 3 - 1$ می شود.

۳۹- اگر $A \cup B = \{\}$ باشد کدام مورد در خصوص مجموعه های A و B به ترتیب صحیح است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

(۲) ناتهی - ناتهی

(۱) ناتهی - تهی

(۴) تهی - تهی

(۳) تهی - ناتهی

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است. اگر $A \cup B = \{\}$ ، آنگاه هر دو مجموعه A و B تهی هستند.

۴۰- حاصل عبارت $A = \frac{1+t+t^2+\dots+t^8}{1+t^3+t^6}$ به ازای $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

(۴) ۲

(۳) ۵ (۱)

(۲) ۱

(۱) ۵ (۲)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است. مجموع n جمله از تصاعد هندسی به صورت زیر به دست می آید:

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$$

در اینجا:

$$\frac{1+t+t^2+\dots+t^8}{1+t^3+t^6} = \frac{\frac{1-t^9}{1-t}}{\frac{1-t^9}{1-t^3}} = \frac{1-t^3}{1-t} = 1+t+t^2$$

با جایگذاری $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ داریم:

$$1+t+t^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} + \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} =$$

$$\frac{4+2\sqrt{5}-2+5+1-2\sqrt{5}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۴۱- انحراف معیار داده‌های آماری ۶۲، ۷۴، ۶۶، ۷۰ و ۷۸ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر دوم سال ۹۴)

$$4\sqrt{2} \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

$$4 \text{ (۲)}$$

$$2\sqrt{2} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه صحیح ۴ می‌باشد.

تعداد داده = ۵

میانگین داده: $74 + 62 + 70 + 66 + 78$ تقسیم بر ۵ می‌شود ۷۰

مربع اختلاف هر داده با میانگین به شرح زیر است

داده	مربع اختلاف هر داده با میانگین
۷۴	۷۴ منهای ۷۰ به توان ۲ می‌شود ۱۶
۶۲	۶۲ منهای ۷۰ به توان ۲ می‌شود ۶۴
۷۰	۷۰ منهای ۷۰ به توان ۲ می‌شود ۰
۶۶	۶۶ منهای ۷۰ به توان ۲ می‌شود ۱۶
۷۸	۷۸ منهای ۷۰ به توان ۲ می‌شود ۶۴

واریانس داده‌ها: $16 + 64 + 0 + 64 + 64$ تقسیم بر ۵ می‌شود ۳۲

انحراف معیار برابر رادیکال واریانس داده‌ها می‌باشد. که می‌شود $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ پس گزینه صحیح ۴ می‌باشد.

۴۲- اگر $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$-3 \text{ (۴)}$$

$$-1 \text{ (۳)}$$

$$2 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

سه ماتریس داده شده را اگر درهم ضرب کنیم به $\begin{bmatrix} a+3b \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌رسیم که پس از حل دستگاه $a=4$ ، $b=-1$ لذا $a-b=5$ می‌شود.

۴۳- حاصل عبارت $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 * \frac{2}{3} * \frac{1}{27^2}$ چیست؟ (سازمان ثبت اسناد و املاک کشور سال ۹۳)

$$\frac{-2}{3^{-10}} \text{ (۴)}$$

$$\frac{-2}{3^{10}} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{3^{10}} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3^{-10}} \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{(27)^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{(3^3)^2} = \frac{1}{3^3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^6} = \frac{2}{3^{10}}$$

۴۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)|x| & |x| \leq 1 \\ ax+2 & |x| \geq 1 \end{cases}$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3)|x| = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax+2$$

چون $|x|=1$ می‌شود پس: $a+2=4|x| \rightarrow a=2$

۴۵- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ به ازای جميع مقادیر x باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) $x-1$ (۲) $x+1$ (۳) $1-x$ (۴) $-x-1$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون معکوس هم هستند $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ پس $b=x$, $c=-1$, $b+x=x-1$

۴۶- اگر خطوط $2y-mx=2$ و $y=(3n-1)x$ با هم موازی باشند، کدام رابطه بین m و n برقرار است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

- (۱) $6n+m=2$ (۲) $6n-m=2$ (۳) $6n-m=-2$ (۴) $n+6m=2$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} y = (3n-1)x \\ 2y - mx = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = (3n-1)x \\ y = \frac{m}{2}x + 1 \end{cases} \rightarrow 3n-1 = \frac{m}{2} \quad 6n-m=2$$

۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{95} کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۸۸ (۳) ۱۹۰ (۴) ۱۹۲

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 + (n-1)d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (n \geq 1, d = 2)$$

$$\text{مجموع درایه ها} = 1 + 1 + (2 + 94 \times 2) = 192$$

۴۸- اگر $[a, b]$ برد تابع $y = x - \frac{1}{4}[4x]$ باشد، حاصل $2-b$ کدام است؟ (تابع جزء صحیح است.) (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$\frac{5}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{7}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$y = x - \frac{1}{4}[4x] \rightarrow 4y = x - [x] \quad (*)$$

می دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ پس در عبارت $(*)$ $y = \frac{1}{4}$ می دهیم

$$y = \frac{1}{4} \rightarrow \text{برد تابع} = \left[a, \frac{1}{4} \right) \rightarrow 2 - b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

۴۹- چند تصاعد حسابی با قدر نسبت طبیعی بزرگ تر از واحد می توان ساخت به طوری که سه جمله ی این تصاعد یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۸ باشد؟ (جمله نخست طبیعی است.) (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$۸ \text{ (۴)}$$

$$۷ \text{ (۳)}$$

$$۶ \text{ (۲)}$$

$$۵ \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ ...	۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ ...	۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ ...	۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ ...	۵ و ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵ ...
-----------------------	------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------

۵۰- اگر رابطه $\{ (1,4), (m+n, 8), (2m-1, 4), (5,8), (1, mn) \}$ یک تابع وارون پذیر باشد، مقدار n کدام است؟ (وزارت نیرو

سال ۹۶)

$$۶ \text{ (۴)}$$

$$۵ \text{ (۳)}$$

$$۳ \text{ (۲)}$$

$$۴ \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد. از اینکه رابطه مذکور وارون پذیر است پس، یک به یک است. لذا:

$$(1,4) = (2m-1,4) \Rightarrow 2m-1 = 1 \Rightarrow m = 1$$

رابطه مذکور یک تابع است، پس:

$$(1,4) = (1, mn) \Rightarrow mn = 4 \Rightarrow n = 4$$

۵۱- دامنه و برد تابع $y=f(x)$ ، به ترتیب بازه‌های $[-2,4]$ و $[-5,3]$ است. برد تابع $g(x)=2f(x+3)-1$ ، کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

- (۱) $[-11,5]$ (۲) $[-5,5]$ (۳) $[-5,7]$ (۴) $[1,13]$

پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$-5 < f(x) < 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -5 < f(x+3) < 3 \\ \Rightarrow 2(-5) - 1 < 2f(x+3) - 1 < 2(3) - 1 \\ \Rightarrow -11 < g(x) < 5 \end{aligned}$$

۵۲- منحنی $x^2 - 3x - 4 = 0$ ، محور Xها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$(x+1)(x-4)=0 \rightarrow x=-1,4 \rightarrow \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$$

$$d = \sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2} = \sqrt{25+6} - 5$$

۵۳- اگر $\sqrt{3}a$ و $a+2$ سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، حاصل $a_9 - a_7$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۵۴ (۴) ۶۳

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

می‌دانیم قدر نسبت برابر $\sqrt{3}$ است پس طبق قاعده تصاعد هندسی مجذور جمله وسط برابر حاصلضرب جمله اول و سوم است پس:

$$(\sqrt{3}a)^2 = a(a+2) \rightarrow 2a^2 - 2a = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$$

بنابراین جملات تصاعد هندسی می‌شوند ۱ و $\sqrt{3}$ و ۳ و قدر نسبت $\sqrt{3}$ است یعنی:

$$a_9 - a_7 = a_1 r^8 - a_1 r^6 = 1 \times (\sqrt{3})^8 - 1 \times (\sqrt{3})^6 = \sqrt{3}^6 (\sqrt{3}^2 - 1) = 54$$

۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0+} [x^2] + [x^3]$ کدام است؟ (تامین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$x \rightarrow 0^+ \lim [x^2] + [x^3] = 0 + 0 = 0$$

۵۵- مجموعه جواب نامعادله $(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5)(3x - 2) \leq 0$ ، شامل چند عدد طبیعی است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) عضو طبیعی ندارد.

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تعیین علامت می‌کنیم:

$$(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5) = (x - \sqrt{5})^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

برای منفی شدن $(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5)(3x - 2)$ بایستی پرانتز اول منفی شود و پرانتز دوم همواره مثبت است لذا $x \leq \frac{2}{3}$ که بدیهی است هیچ عدد طبیعی در این فاصله نخواهیم داشت.

۵۶- اگر $\left\{ (1, -2), \left(-\frac{3}{2}, 7\right), (4, 11), (-1, 6) \right\}$ و $g = \{ (-3, 8), (0, 2), (5, -2) \}$ باشد، برد تابع $f\left(\frac{1}{2}g(x)\right)$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

- ۱ (۱) $\{-2, 6, 11\}$ ۲ (۲) $\{-2, 7, 11\}$

- ۳ (۳) $\{4, 1, -1\}$ ۴ (۴) $\{-1, 3, 4\}$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

می‌دانیم $g(x) = \{8, 2, -2\}$ پس $\frac{1}{2}g(x) = \{4, 1, -1\}$ پس:

$$f\left(\frac{1}{2}g(x)\right) = f(\{4, 1, -1\}) = \{11, -2, 6\}$$

۵۷- با حروف کلمه "اشتغال"، چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت، به طوری که حرف "الف"، یک در میان ظاهر شود؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

- ۱ (۱) ۱۲ ۲ (۲) ۲۴ ۳ (۳) ۳۶۰ ۴ (۴) ۷۲۰

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{1}{x} \times \frac{4}{x} \times \frac{1}{x} \times \frac{3}{x} = 12$$

با توجه به تغییر محل الف ۱۲ در ۲ ضرب می شود که حاصل ۲۴ می شود.

۵۸- چند جمله ای $f(x) = x^4 + 3x^3 + ax$ بر $x+1$ بخش پذیر است. بزرگترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$-1 - \sqrt{7} \quad (۴)$$

$$1 - \sqrt{7} \quad (۳)$$

$$-1 + \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$1 - \sqrt{3} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

بایستی $P(-1) = 0$ لذا $1 - 3 - a = 0$ و $a = -2$ اما

$$\frac{P(x)}{x+1} = \frac{x^4 + 3x^3 - 2x}{x+1} = \frac{x(x^3 + 3x^2 - 2)}{x+1} \quad 0 \rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x+1} = x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \rightarrow = \text{بزرگترین جواب} = -1 + \sqrt{3}$$

۵۹- چند عدد شش رقمی می توان با اعداد ۳ و ۵ و ۷ نوشت، بطوری که هر عدد حداقل یکبار ظاهر شود؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$۳۶۰ \quad (۴)$$

$$۵۴۰ \quad (۳)$$

$$۷۲۰ \quad (۲)$$

$$۲۷۰ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$(3^6) * 3^3 = 540$$

۶۰- در یک خانواده فرزند بزرگتر از میان سه فرزند دختر است، با کدام احتمال دو فرزند دیگر نیز دختر است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

$$\frac{1}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

راه حل اول:

فضای نمونه عبارت است از (پ و پ)، (پ و د)، (د و پ)، (د و د)

$$P_{\text{(هر دو دختر)}} = \frac{1}{4} \rightarrow P = \frac{1}{4}$$

راه حل دوم:

$$\rightarrow P_{\text{(هر دو دختر)}} = P_{\text{(دختر بودن اولی)}} \times P_{\text{(دختر بودن دومی)}} \rightarrow P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ داریم}$$

راه حل سوم:

در احتمال‌های دو حالتی اگر P احتمال پیروزی و $q = 1 - p$ احتمال شکست باشد احتمال x پیروزی از N بار آزمایش عبارت است از:

$$P = \binom{N}{p} p^x (q)^{N-x} \rightarrow P = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow p = \frac{1}{4}$$

۶۱- در کدام یک از نمودارهای آماری، فقط از فراوانی نسبی برای رسم آن استفاده می‌شود؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

(۲) چندضلعی

(۱) دایره ای

(۴) مستطیلی

(۳) ستونی

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۶۲- خارج قسمت تقسیم $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$ بر $(x + 1)(x - 2)$ ، کدام چند جمله ای است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

(۲) $(x + 1)(x + 2)$

(۱) $(x - 1)(x + 2)$

(۴) $(x - 1)(x - 2)$

(۳) $(x + 1)(x - 2)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = (x-1)(x+2)$$

۶۳- عبارت $x^3 + 11x^2 - 3x + a$ بر $x+1$ بخش پذیر است. مقدار a کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۲) ۹

(۱) ۱۵

(۴) -۱۳

(۳) -۷

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(x) = x^3 + 11x^2 - 3x + a$$

بایستی $P(-1)$ برابر صفر شود.

$$P(-1) = -1 + 11 + 3 + a = 0 \rightarrow a = -13$$

۶۴- اگر $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^2+B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ (۴)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ (۳)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ (۲)}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۶۵- در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b ، باقیمانده و خارج قسمت برابر q بوده و مجموع مقسوم علیه و خارج قسمت برابر ۱۲ است. اگر ۲ واحد از مقسوم علیه کم شود ۳ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقیمانده صفر می‌شود، مجموع ارقام عدد a کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{array}{r} a \mid \frac{b}{q} \\ - \\ q \end{array}$$

$$\Rightarrow a = bq + q \quad (1),$$

$$b + q = 12 \Rightarrow q = 12 - b \quad (2),$$

$$\begin{array}{r} a \mid \frac{b-2}{q+3} \\ - \\ 0 \end{array} \Rightarrow a = (b-2)(q+3) \quad (3),$$

از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$a = q(b+1) = (12-b)(b+1) = -b^2 + 11b + 12$$

از (۳) نتیجه می‌شود که:

$$a = (b-2)(15-b) = -b^2 + 17b - 30$$

پس:

$$-b^2 + 11b + 12 = -b^2 + 17b - 30 \Rightarrow 11b + 12 = 17b - 30 \Rightarrow 6b = 42 \Rightarrow$$

$$b = 7, q = 5, a = 4$$

پس مجموعه ارقام a برابر با ۴ است.

۶۶- از کیسه ای که شامل کارت‌هایی به شماره‌های ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۷ است. سه کارت به تصادف خارج می‌کنیم و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. احتمال اینکه این عدد سه رقمی زوج باشد کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

$$\frac{2}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{15} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{15} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$5 * 4 * 3 = 60$$

تعداد کل حالات ممکن

برای زوج بودن رقم یکان باید ۲ یا ۴ باشد

$$4 * 3 * 1 = 12 \quad \text{الف) اگر رقم یکان ۲ باشد}$$

$$4 * 3 * 1 = 12 \quad \text{ب) اگر رقم یکان ۴ باشد}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5} \quad \text{بنابر این از جمع حالات الف و ب داریم } 12 + 12 = 24 \text{ یعنی در نهایت}$$

۶۷- نسبت تشابه دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $\frac{5}{2}$ است، اگر مساحت مثلث کوچکتر ۸ باشد، طول وتر مثلث بزرگتر کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

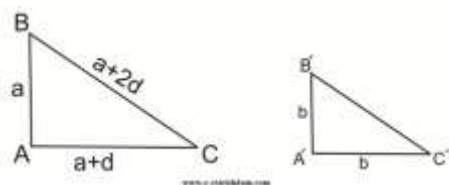
$$5\sqrt{2} \text{ (۴)}$$

$$10\sqrt{2} \text{ (۳)}$$

$$10 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$$

$$BC = \sqrt{2} a. \quad B'C' = \sqrt{2} b$$

$$S' = \frac{1}{2} \times b \times b = 8 \quad \rightarrow \quad b^2 = 16 \quad \rightarrow \quad b = 4$$

$$\rightarrow a = \frac{5}{2} b \rightarrow a = 10 \quad \rightarrow BC = 10\sqrt{2}$$

۶۸- اگر $f = \{(1,2) (3,4) (0,1) (5,6)\}$ و $g = \{(1,-1) (5,0) (-2,-2)\}$ باشد، مقدار $\text{fog}(5)$ کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

$$-1 \text{ (۴)}$$

$$-4 \text{ (۳)}$$

$$2 \text{ (۲)}$$

$$6 \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\text{fog}(5) = f(g(5)) = f(0) = -1 \quad \text{با در نظر گرفتن دامنه خواهیم داشت:}$$

۶۹- چند عدد شش رقمی با ارقام $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ می توان ساخت، به طوری که فقط صفر یک در میان و تکراری ظاهر شود؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۱) ۱۲۰ (۲) ۹۰ (۳) ۶۰ (۴) ۳۰

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

طبق اصل شمارش و دقت به شش رقمی شدن عدد (صفر در سمت چپ نباید باشد):

$$1 \times 5 \times 1 \times 4 \times 1 \times 3 = 60$$

۷۰- مجموعه جواب معادله $\frac{2+3x}{2} < \frac{5x+1}{3}$ ، کدام مجموعه ی زیر است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

(۱) $(-\infty, -4)$ (۲) $(-\infty, 4)$ (۳) $(-4, +\infty)$ (۴) $(4, +\infty)$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{2+3x}{2} < \frac{5x+1}{3} \rightarrow 6 + 9x < 10x + 2 \rightarrow 4 < x$$

۷۱- در دسته بندی داده های آماری، مرکز دسته دوم و هشتم به ترتیب ۱۲ و ۴۸ است. کران بالای دسته دوازدهم کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

(۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۸ (۴) ۷۹

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$5d + 2 \times \frac{d}{2} = 48 - 12 \rightarrow 6d = 36 \rightarrow d = 6$$

$$x = 48 + \frac{d}{2} + 4d \rightarrow x = 75$$

۷۲- جدول زیر، فراوانی نسبی مراجعات به اورژانس یک بیمارستان در ۱۲۰ روز را نشان می دهد. در چند روز تعداد مراجعات کمتر از ۴ مورد بوده است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

تعداد در یک روز	۰	۱	۱	۳	۴
فراوانی نسبی	۲.۰	۱.۰	۲۵.۰	X	۳.۰

(۱) ۳۶ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۶

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$0.2 + 0.1 + 0.25 + x + 0.3 = 1 \Rightarrow 0.85 + x = 1 \Rightarrow x = 0.15$$

فراوانی نسبی کمتر از ۴ عبارتند از:

$$0.2 + 0.1 + 0.25 + 0.15 = 0.7$$

بنابراین پاسخ مطلوب عبارت است از:

$$0.7 \times 120 = 84$$

۷۳- رنگ چشم علی قهوه ای است. متغیرهای تصادفی X و Y رنگ چشم و طول قد هر دونفری است که به تصادف در سمت چپ و راست علی قرار می گیرند. نوع متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب کدام اند؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

(۱) کیفی اسمی - کمی پیوسته (۲) کیفی ترتیبی - کمی پیوسته

(۳) کیفی اسمی - کمی گسسته (۴) کیفی ترتیبی - کمی گسسته

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۷۴- یک زوج بعد از ده سال زندگی مشترک، برای آزمایش هپاتیت به آزمایشگاه مراجعه می کنند. احتمال مثبت بودن آزمایش مرد و زن، به ترتیب برابر ۰٫۸ و ۰٫۵ است. اگر نتیجه آزمایش زن یا مرد حتما مثبت باشد، در این صورت، احتمال اینکه هر دو نفر، نتیجه آزمایش هایشان مثبت باشد، کدام است؟ (تامین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

(۱) ۰٫۴۵ (۲) ۰٫۲۵ (۳) ۰٫۴ (۴) ۰٫۳

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

طبق تست $P(A \cup B) = 1$ است زیرا $P(S) = 1$ پیشامد حتمی است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 = 0.8 + 0.5 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

۷۵- حاصل $(\sqrt{2} + 1)^2 \times (\sqrt{2} - 1)^2$ ، کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۱) $(3 + 2\sqrt{2})^2$ (۲) $(3 + \sqrt{2})^{-2}$ (۳) $(17 - 12\sqrt{2})^{-1}$ (۴) $(17 + 6\sqrt{2})$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$(\sqrt{2} + 1)^2 \times (\sqrt{2} - 1)^{-2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^{-2}} \xrightarrow[\text{گویا کردن}]{\text{اتحاد مربع}} \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^2$$

۷۶- جملات $3a+3$ و $2a+4$ و $2a-$ به ترتیب جمله‌های اول، پنجم و نهم یک دنباله هستند. مقدار a کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

$$\frac{-3}{2} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

طبق قاعده تصاعد حسابی بایستی $a_1 + a_9 = 2a_5$ یعنی $2a+4 + 2a- = 2(2a+3)$ یعنی $a=3$

۷۷- داده‌های ۵، ۱۴، ۱۰، ۱۸، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۵، ۳، ۴، ۷، ۹، ۱۳. در نمودار جعبه ای نمایش داده می‌شود. طول دامنه میان چارکی کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

$$۱۵ \quad (۴) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۵.۹ \quad (۲) \quad ۵.۸ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد. داده‌ها به ترتیب عبارتند از:

$$3, 4, 7.5, 9, 10, 11, 13.5, 14, 16, 18, 18$$

که به ترتیب از چپ به راست چارک اول = 7.5، چارک دوم = 11 و چارک سوم = 16 است. لذا اختلاف چارک سوم از چارک اول برابر است با:

$$16 - 7.5 = 8.5$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 3 \rightarrow \frac{(2x_1 + 3) + \dots + (2x_n + 3)}{n} = \frac{2(x_1 + \dots + x_n) + 3n}{n} = 2 * 3 + 3 = 9$$

۷۸- در نمودار روبه رو، اختلاف میانه و مد داده‌ها کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)



www.e-estekhdam.com

$$۳ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۱ \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد. با توجه به نمودار، بیشترین فراوانی را نگاه می‌کنیم لذا مد ۴ است. از مرتب کردن داده‌ها میانه هم ۴ می‌شود زیرا:

$$1 \text{ و } 2 \quad 3 \text{ و } 4 \quad 4 \text{ و } 5 \quad 6 \text{ و } 7$$

میانه = 4

تفاضل مد و میانه = صفر

۷۹- ده درصد از مراجعه کنندگان به یک بیمارستان در یک روز خاص، دارای بیمه تکمیلی می باشند. احتمال اینکه در این روز خاص، پنجمین بیماری که در این بیمارستان درمان می شود اولین بیماری باشد که بیمه تکمیلی دارد، کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

$$\frac{9^5}{10^4} \quad (۴)$$

$$\frac{5^9}{4^{10}} \quad (۳)$$

$$\frac{4^9}{5^{10}} \quad (۲)$$

$$\frac{9^4}{10^5} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

بنابر فرمول توزیع هندسی $\theta(1-\theta)^{x-1}$ داریم:

$$f(4,0.1) = (1-0.4)^{5-1} (0.1) = \frac{9^4}{10^5}$$

۸۰- حاصل عبارت $\log_{216} 6\sqrt[3]{6}$ ، کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\log_{216} 6\sqrt[3]{6} = \log_{6^3} 6 \times 6^{1/3} = \log_{6^3} 6^{4/3} = \frac{4}{3} \log_6 6 = \frac{4}{9}$$

۸۱- میانگین و میانه یک جامعه به ترتیب ۴۰ و ۵۰ است. در صورتی که جامعه از چولگی معقولی برخوردار باشد مد آن تقریباً چند خواهد بود؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$۷۰ \quad (۴)$$

$$۵۰ \quad (۳)$$

$$۴۵ \quad (۲)$$

$$۱۰ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد. چون میانگین داده ها برابر ۴۰ و میانه عدد ۵۰ است لذا طبق فرمول پیرسون داریم:

$$\bar{x} - mp = 3(\bar{x} - md) \rightarrow 40 - mp = 3(40 - 50) \rightarrow mp = 70$$

۸۲- اگر $\log_{10} 5 = t$ ، آنگاه مقدار $\log_5 500$ کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

$$\frac{t+1}{t} \quad (۴)$$

$$\frac{t+2}{t} \quad (۳)$$

$$\frac{2-t}{t} \quad (۲)$$

$$1 - \frac{2}{t} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\log_5^{500} = \log_5^{5 \times 10^2} = \log_5^{10^2} = 1 + 2 \log_5^{10} = 1 + 2 \times \frac{1}{\log_5^{10}} = 1 + \frac{2}{t} = \frac{t+2}{t}$$

۸۳- در یک بزرگراه سه خودروی پژو، پراید و اتوبوس تصادف کرده اند. احتمال این که خودروی پژو بیمه نداشته باشد، برابر ۰,۳ و احتمال اینکه هر کدام از دو خودروی دیگر بیمه بدنه نداشته باشند، برابر با ۰,۲ است. احتمال اینکه حداقل دو خودروی سواری، بیمه بدنه نداشته باشند، کدام است؟ (تامین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

(۱) 0.012 (۲) 0.048 (۳) 0.06 (۴) 0.096

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه صحیح در میان جوابها موجود نیست

متمم حداکثر یکی بیمه نداشته باشد = احتمال حداقل دو بیمه نداشته باشد

$$P = 1 - P(\text{حداکثر یکی بیمه نداشته باشد}) = P(\text{حداقل دو بیمه نداشته باشد})$$

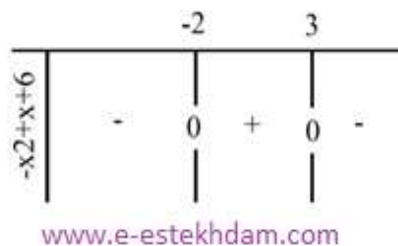
$$1 - \left(\frac{3}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \right) = 0.136$$

۸۴- اگر $[a, b]$ دامنه تابع $f(x) = x \sqrt{\frac{x-x^2+6}{x^2+1}}$ باشد مقدار $a+b$ چند برابر a است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

(۱) -0/5 (۲) 0/5 (۳) -2 (۴) 2

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد. بایستی عبارت زیر رادیکال، نامنفی باشد. X^2+1 همواره

مثبت است؛ لذا کافی است: $-x^2 + x + 6 \geq 0$ و ریشه های عبارت برابر با $\{-2 \text{ و } 3\}$.



بنابراین، به ازای $[-2 \text{ و } 3]$ تابع $f(x)$ تعریف شدنی است. یعنی دامنه $f(x)$ برابر با $[-2 \text{ و } 3]$ است.

لذا $a = -2$ و $b = 3$ پس:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{-2+3}{-2} = -\frac{1}{2} = -0/5$$

۸۵- شرکت بیمه A دارای ۴ کارشناس و شرکت بیمه B دارای ۵ کارشناس است. این دو شرکت می خواهند برای صرفه جویی از بین کارشناسان، دو نفر را برای هر واحد سیار خسارت در یک بزرگراه انتخاب کنند. احتمال اینکه هر دو نفر از یک شرکت باشند کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

$$\frac{7}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{4}{9}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۸۶- برای داده های نمودار ساقه و برگ زیر، اختلاف زاویه ی مربوط به داده ۱۵ و ۲۵ در نمودار دایره ای چند درجه است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

برگ	ساقه
۹ ۷ ۴	۰
۹ ۵ ۵ ۲ ۱ ۰	۱
۹ ۷ ۵ ۳ ۲	۱

$$۵۸ \quad (۴)$$

$$۴۸ \quad (۳)$$

$$۳۸ \quad (۲)$$

$$۲۸ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

در کل ۱۵ داده داریم، عدد ۱۵ سه بار تکرار شده و عدد ۲۵ تنها یکبار زاویه مناسب با هر عضو در نمودار دایره ای برابر $\frac{360}{15}$ است، پس

$$\Delta\theta = 3 \times \frac{360}{15} - 1 \times \frac{360}{15} = 48 \quad \rightarrow \Delta\theta = 48$$

۸۷- به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه های معادله $3x^2 - 6x + m = 0$ دو برابر ریشه، دیگری است، (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$9 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{27}{2} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

اگر t_1 و t_2 دو ریشه معادله باشند بایستی $t_1 = 2t_2$ و چون مجموعه ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ است یعنی:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -\frac{-6}{3} = 2 \end{cases}$$

می دانیم حاصلضرب ریشه $\frac{4}{a}$ می شود یعنی $t_1 \times t_2 = \frac{m}{3}$ پس: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{m}{3}$ یعنی $m = \frac{8}{3}$

۸۸- اگر $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = \frac{x^2 - x}{x + 1}, x \in \mathbb{Z}\}$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A ، کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$Y = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{x(x - 1)}{x + 1}$$

$$X = 0, X = 1, X = -2, X = -3$$

۸۹- قدر نسبت دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots برابر ۳ است. قدر نسبت دنباله هندسی $a_2^2, a_1^2, a_3^2, \dots$ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$Q = 3, \therefore a_1, a_1 q, a_1 q^2$$

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{a_1^2 q^2}{a_1 a_1} = q^2 = 9$$

۹۰- در یک مطالعه آماری انحراف معیار داده ها برابر ۱۵ است، اگر همه این داده ها را در $\frac{2}{3}$ ضرب و با ۵ جمع کنیم میانگین داده های جدید برابر ۱۱ خواهد شد. ضریب تغییرات داده های اولیه کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۵)

 $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{15}{13}$ (۳) $\frac{10}{11}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

اگر داده ها را در a ضرب کنیم و با b جمع کنیم، میانگین نیز در a ضرب و با b جمع می شود، یعنی:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots & \Leftrightarrow ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots \\ \frac{2}{3}\bar{x} + 5 = 11 & \Rightarrow \bar{x} = 9 & \bar{x} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

$$\text{انحراف معیار} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = \frac{\text{ضریب تغییرات}}{\text{میانگین}}$$

۹۱- در یک جامعه آماری به هر داده به میزان ۱۵ درصد خودش، اضافه شده است. ضریب تغییرات داده های جدید نسبت به داده های قبل چه تغییری می کند؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)

۲/۲۵ (۲) برابر می شود.

(۱) ثابت می ماند.

۱/۱۵ (۴) برابر می شود.

۱/۸۵ (۳) برابر می شود.

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{ضریب تغییرات} = \sqrt{\frac{\sum_0 (x_1 - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_0 (x_1^0 + 0/15 x_1^0 - 1/15 \bar{x})^2}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\sum_0 (1/15)^2 (x_1^0 - \bar{x})^2}{n}} = 1/15 \sqrt{\frac{\sum_0 (x_1^0 - \bar{x})^2}{n}}$$

یعنی ۱/۱۵ برابر می‌شود

۹۲- عبارت $\frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x}$ ، پس از ساده شدن معادل کدام مورد است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

$$\sin x - \cos x \quad (۱) \quad \cos x + \sin x \quad (۲)$$

$$\cos x - \sin x \quad (۳) \quad -(\sin x + \cos x) \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)} = \sin x - \cos x$$

۹۳- خط $y=b$ از محل تقاطع دو خط عمود $2x+3y=6$ و $ax+2y=-12$ می‌گذرد. مقدار b کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

$$\frac{7}{19} \quad (۱) \quad -\frac{6}{13} \quad (۲) \quad \frac{8}{15} \quad (۳) \quad -\frac{5}{11} \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ ax + 2y = -12 \\ y = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3b = 6 \quad (1) \\ ax + 2b = -12 \quad (2) \end{cases}$$

چون دو خط عمودند لذا شیب آنها عکس و قرینه هم هست.

$$\text{پس: شیب (۱): } -\frac{2}{3} \text{ شیب (۲): } -\frac{a}{2} \rightarrow -\frac{2}{3} \times -\frac{a}{2} = -1$$

$$a = -3 \rightarrow$$

با جاگذاری در (۱) و (۲):

$$b = -\frac{6}{13}$$

۹۴- اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد حاصل $\sin 3x \cos x - \sin x$ کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{3}{27}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{5}{27}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: جواب در گزینه ها نیست.

$$\begin{aligned} \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3} &\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \\ &\Rightarrow \sin x = \pm \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

در ربع سوم است.

$$\sin^3 x \cos x - \sin x = (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos x - \sin x =$$

$$\left(3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 4\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$\left(-2 + \frac{32}{27}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{2}{3} = ?$$

۹۵- یک اداره دارای ۵ سواری و ۴ وانت بار می باشد، به چند طریق می توان ۳ ماشین انتخاب کرد تا برای ماموریت به سه شهرستان متفاوت اعزام شوند، به طوری که حداقل ۲ سواری بین ماشین های اعزامی باشد؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

(۴) ۵۰

(۳) ۸۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۱۴۰

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \binom{4}{1} = 50$$

۹۶- اگر $x=2$ بین دو ریشه معادله $3x^2 + mx - 3 - m = 0$ واقع باشد، کدام مقدار در مجموعه مقادیر m قرار ندارد؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

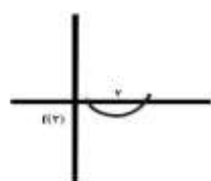
(۴) -8

(۳) -10

(۲) -9/5

(۱) -10/5

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.



$$F(2) < 0 \rightarrow 12 + 2m - 3 - m < 0$$

$$\rightarrow m < -9$$

۹۷- اگر واریانس داده‌های آماری $d-4$ و $c-1$ و $b+1$ و a و 10 برابر با صفر باشد، میانگین d, c, b, a کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و

(۹۴)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

چون واریانس صفر است پس داده‌ها برابرند، همه را با هم مساوی قرار داده و معادلات را حل می‌کنیم پس

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \\ c = 11 \\ d = 14 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{10+9+11+14}{4} = 11$$

۹۸- اگر عرض رأس سهمی $y = x^2 - 2x - 2a$ برابر ۱۶- باشد، سهمی، محور x ها را در کدام نقاط قطع می‌کند؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و

(۹۴)

(۱) ۳, -۲ (۲) ۳, -۲ (۳) ۳, -۵ (۴) ۳, -۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$x = \frac{-b}{2a} = 1, y = -16 \rightarrow s \begin{vmatrix} 1 \\ -16 \end{vmatrix}$$

$$-16 = 1 - 2 - 2a \rightarrow a = 7.5 \rightarrow y = x^2 - 2x - 15$$

صدق می‌دهیم در معادله:

$$y=0 \text{ را صدق می‌دهیم در معادله به دست آمده: } 0 = x^2 - 2x - 15 \rightarrow x = 5, -3 \text{ پس } \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ محل تقاطع محور } x \text{هاست.}$$

۹۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \leq 2 \\ x^2 - 3x & x > 2 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(3+x^2) + f(2-x^2)$ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

(۱) $+5x^4$ (۲) $-53x^4$ (۳) $+5x3x^4$ (۴) $-3x+54x^4$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$3(2-x^2) - 1 + (3+x^2)^2 - 3(3+x^2) = 6 - 3x^2 - 1 + 9 + x^4 + 6x^2 - 9 - 3x^2 = x^4 + 5$$

۱۰۰- اگر $\log a = 2$ و $\log b = 3$ باشد، حاصل $\log \sqrt[3]{90}$ کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

(۱) $3(1+2a)$ (۲) $3(a+2b)$ (۳) $\frac{1}{3}(1+2b)$ (۴) $\frac{1}{3}(2a+b)$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\log 90^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 90 = \frac{1}{3} \log 2 \times 3^2 \times 5 = \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 3 + \log 5) = \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 3 + \log \frac{10}{2})$$

$$= \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 3 + 1 - \log 2) = \frac{1}{3} (1 + 2b)$$

۱۰۱- دو خط $3x-2y=5$ و $ax+by=1$ روی خط $x=-1$ همدیگر را قطع کرده اند. اگر خط d ، این دو خط متقاطع را در نقاط $(2,4)$ و $(1,-1)$ قطع کند، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۱) $\frac{17}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{-7}{2}$ (۴) $\frac{-8}{3}$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد. با استفاده از صدق نقطه داریم:

$$3x - 2y = 5 \xrightarrow{x=-1} y = -4$$

$$\begin{cases} -a - 4b = 1 \\ 2a + 4b = 1 \end{cases} \longrightarrow a = 2, b = -\frac{3}{4} \rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{8}{3}$$

۱۰۲- معادله خطی که از مبدا مختصات می گذرد و بر خط واصل نقاط $(6,0)$ و $(0,4)$ عمود است کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

(۱) $2x+3y=0$ (۲) $3x+2y=0$ (۳) $3y-2x=0$ (۴) $3x-2y=0$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{3}{2} \text{ شیب جدید} = \xrightarrow{\text{عکس قرینه}} \frac{-4}{\frac{-4}{6} \text{ به خاطر تعامد}} = \text{شیب} = \frac{0-4}{6-0}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow 3x - 2y = 0$$

۱۰۳- کدام مورد می تواند سه ریشه معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ با شرط $c < 0$ باشد؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

(۱) $-3, -2, 1$ (۲) $-3, 2, 1$ (۳) $-3, -2, -1$ (۴) $3, 2, 1$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ؟ همه موارد می توانند صحیح باشند. سؤال غلط است. چون اگر در پایان معادله c مثبت شود می توان کل معادله را در یک منفی ضرب کرد.

۱۰۴- خط d دو خط عمود $5x-7y=-4$ و $mx + ny$ را در نقاط $(-1,1)$ و $(2,2)$ قطع می کند. مقدار n کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۱) $\frac{-5}{2}$ (۲) $\frac{5}{24}$ (۳) $\frac{-1}{3}$ (۴) $\frac{1}{36}$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} 7y = 5x + 4 \rightarrow m_1 = \frac{5}{7} \\ mx + ny = 1 \rightarrow m_2 = \frac{-m}{n} \end{cases}$$

چون عمودند $m_1 \times m_2 = -1$ پس $\frac{5}{7} \times (\frac{-m}{n}) = -1$ و لذا $5m + 7n = 0$ و از آنجا با صدق نقطه داریم $\frac{2}{5} \times (2m + 2n = 1)$ پس $n = \frac{5}{24}$, $n = \frac{5}{26}$

۱۰۵ - صد و بیست داده آماری در ۹ دسته طبقه بندی شده اند. درصد فراوانی تجمعی نسبی در دسته های چهارم و پنجم به ترتیب ۵۲ و ۶۸ است. فراوانی مطلق دسته وسط کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد. فراوانی مطلق دسته وسط همان فراوانی مطلق دسته پنجم است که از تفاضل فراوانی تجمعی دسته های پنجم و چهارم است. یعنی:

$$۱۶ = ۵۲ - ۶۸ = \text{فراوانی مطلق دسته وسط}$$

۱۰۶ - خط d دو خط عمود $5x - 7y = -4$ و $mx + ny = 1$ را در نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ قطع می کند. مقدار n کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

 $\frac{1}{36}$ (۴) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{24}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} 7y = 5x + 4 \rightarrow m_1 = \frac{5}{7} \\ mx + ny = 1 \rightarrow m_2 = \frac{-m}{n} \end{cases}$$

چون عمودند $m_1 \times m_2 = -1$ پس $\frac{5}{7} \times (\frac{-m}{n}) = -1$ و لذا $5m + 7n = 0$ و از آنجا با صدق نقطه داریم $\frac{2}{5} \times (2m + 2n = 1)$

پس:

$$n = \frac{5}{26}, n = \frac{5}{24}$$

۱۰۷- واریانس داده‌های $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1$ ، کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد. میانگین داده‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X = \frac{1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + 1 + (-1)}{54} = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1}{54} = \frac{1 - 1 + 1 + 0 - 1}{54} = 0$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{54} \frac{(X_i - X)^2}{n} = \frac{1^2 + (-1)^2 + \dots + 1^2}{54} = \frac{1 + 1 + \dots + 1}{54} = \frac{54}{54} = 1$$

۱۰۸- برد تابع، کدام است؟ $Y = \frac{1-2x}{2x^2-2x+2}$ ، کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

$[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ (۴)

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۳)

$[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ (۲)

$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$1-2x=y(2x^2-2x+2)$$

$$\rightarrow (2y)x^2 + x(2-2y) + (2y-1) = 0$$

$$\Delta = (2-2y)^2 - 4(2y)(2y-1) \geq 0 \rightarrow -12y^2 + 4 \geq 0$$

$$\rightarrow y^2 \leq \frac{1}{3} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۰۹- دو خط $3x-2y=5$ و $ax+by=1$ روی خط $x=-1$ همدیگر را قطع کرده‌اند. اگر خط d ، این دو خط متقاطع را در نقاط $(2,4)$ و

$(1,-1)$ قطع کند، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$-\frac{8}{3}$ (۴)

$-\frac{7}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{17}{6}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با استفاده از صدق نقطه داریم:

$$3x-2y=5 \xrightarrow{x=-1} y=-4$$

$$\begin{cases} -a-4b=1 \\ 2a+4b=1 \end{cases} \rightarrow a=2, b=-\frac{3}{4} \rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{8}{3}$$

(۱) کیفی - تربیتی (۲) کمی - تربیتی (۳) کیفی - اسمی (۴) کمی - گسسته

۱۱۱- اگر خطوط $2y - mx = 2$ و $y = (3n - 1)x$ با هم موازی باشند، کدام رابطه بین m و n برقرار است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

$$n + 6m = 2 \text{ (}\textcircled{r}\text{)} \qquad 6n - m = -2 \text{ (}\textcircled{s}\text{)} \qquad 6n - m = 2 \text{ (}\textcircled{r}\text{)} \qquad 6n + m = 2 \text{ (}\textcircled{s}\text{)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (3n-1)x \\ 2y - mx = 2 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = (3n-1)x \\ y = \frac{m}{2}x + 1 \end{array} \right. \longrightarrow 3n-1 = \frac{m}{2} \quad \underline{6n-m=2}$$

Λ/Δ (F) Υ/Δ (3) ϕ/Δ (2) ϕ (1)

۱۱۳- کمترین مقدار عبارت $x^2 - \sqrt{3}x - 1$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

$$-\frac{7}{4} \text{ (f)} \qquad -\frac{3}{4} \text{ (v)} \qquad \frac{5}{2} \text{ (v)} \qquad \frac{3}{2} \text{ (i)}$$

در عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هر گاه $a \neq 0$ یعنی دهانه سهمی رو به سمت بالا است و می نیمم در نقطه رأس سهمی رخ می دهد که مختصات آن عبارتست از:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

۱۱۴- منحنی $x^2 - 3x - 4 = 0$ ، محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. فاصله این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟ (دیوان محاسبات سال ۹۴)

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$(x+1)(x-4)=0 \rightarrow x=-1,4 \rightarrow \left| \begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right|$$

$$d = \sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$$

۱۱۵- اگر ضریب تغییرات هشت داده آماری x_1, x_2, \dots, x_8 برابر با صفر و میانگین این هشت داده برابر با $\frac{5}{2}$ باشد، میانگین داده های x_1, x_2, x_4, x_5 و x_3 کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow$$

همه داده ها با هم برابرند و همه داده ها $\frac{5}{2}$ اند

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5 \Rightarrow \frac{15}{5} = 3$$

۱۱۶- نمودار میله ای زیر، نشان دهنده تعداد تصادفات رانندگی ۵۰۰ خودرو در چهار منطقه یک شهر در مدت یک ماه است. زاویه مربوط به منطقه سه، در نمودار دایره ای کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)



۱۷,۴ (۴)

۱۵,۲ (۳)

۲۱,۶ (۲)

۱۰,۸ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\alpha = \frac{3 \times 360}{50} = \frac{3 \times 36}{5} \times \frac{2}{2} = 21/6$$

۱۱۷ - میانگین داده‌های یک مطالعه آماری ۱۲ است اگر همه این داده‌ها را بر ۳ تقسیم کنیم و یک واحد به آنها بیفزاییم و در مرحله آخر، داده‌های جدید را دو برابر کنیم. میانگین داده‌های مرحله آخر، کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۶)

(۴) نامشخص

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۷

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: جواب در گزینه‌ها نیست. داریم:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 12$$

طبق صورت تست هر داده x_i به $2\left(\frac{x_i}{3} + 1\right)$ تبدیل می‌شود. لذا میانگین جدید:

$$\frac{2\left(\frac{x_1}{3} + 1\right) + \dots + 2\left(\frac{x_n}{3} + 1\right)}{n} = \frac{\left(\frac{2x_1}{3} + 2\right) + \dots + \left(\frac{2x_n}{3} + 2\right)}{n} =$$

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) + \frac{2n}{n} = \frac{2}{3} \times 12 + 2 = 10$$

۱۱۸ - حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2] + [x^3]$ ، کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) صفر

(۱) ۳

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2] + [x^3] = 0 + 0 = 0$$

$$x \rightarrow 0^+$$

۱۱۹ - متغیر تصادفی X و Y ، به ترتیب نشان دهنده وزن و قد نوزادان متولد شده در طول یک ماه در یک بیمارستان است. ۲۰ نوزاد به تصادف انتخاب می‌شود. اگر مجموع وزن و قد این نوزادان، به ترتیب ۵۰ کیلوگرم و ۷ متر باشند و $Y = aX + 0/3$ خط رگرسیون بین X و Y باشد، مقدار a کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

(۴) $\frac{3}{50}$ (۳) $\frac{13}{50}$ (۲) $\frac{1}{0/05}$ (۱) $\frac{1}{50}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X = \frac{50}{20} = 2/5 \text{ وزن}$$

$$Y = \frac{7}{20} = 0/35 \text{ قد}$$

$$Y = ax + 0/3$$

$$0/35 = a * 2/5 + 0/3 \Rightarrow a = \frac{1}{50}$$

۱۲۰- حاصل انتگرال $\int_0^2 (2x-1)(3x)dx$ ، کدام است؟ (تأمین اجتماعی سال ۹۳ و ۹۴)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\int_0^2 (2x-1)(3x)dx = \int_0^2 6x^2 dx - \int_0^2 3x dx =$$

$$\left. \frac{6x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right|_0^2 = 10$$

۱۲۱- یک میوه فروش می‌خواهد ۳ جعبه پرتقال، ۴ جعبه سیب و دو جعبه نارنگی را در سه ردیف به طور ستونی روی هم قرار دهد، به طوری که میوه‌ها در هر ستون از یک نوع باشد، وی به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (وزن تمام جعبه‌ها، متفاوت است.) (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

۲۸۸ (۴)

۸۶۴ (۳)

۱۳۹۴ (۲)

۱۷۲۸ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! = 6 \times 2 \times 24 \times 6 = 1728$$

۱۲۲- دو جامعه دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری متمایز هستند، برای مقایسه پراکندگی داده‌های آماری دو جامعه، کدام شاخص مناسب است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۴) انحراف معیار

(۳) واریانس

(۲) دامنه تغییرات

(۱) ضریب تغییرات

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۳- ۶۰ درصد کارمندان یک سازمان، از اینترنت برای پرداخت قبض‌های خود استفاده می‌کنند و سایر افراد از طرق دیگر این کار را انجام می‌دهند. احتمال اینکه کارمندی قبض تلفن همراه خود را پرداخت کند، به شرط این که اینترنت و سایر راه‌ها استفاده شود، به ترتیب برابر با ۰/۲۴ و ۰/۱۴ است. اگر کارمندی به تصادف انتخاب شود، احتمال این که وی قبض تلفن همراه خود را پرداخت کند، چقدر است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر اول سال ۹۴)

۰/۲ (۴)

۰/۱۴۴ (۳)

۰/۱ (۲)

۰/۲۰۸ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(A) = 0/6, p(\overline{A}) = 0/4$$

$$P(B|A) = \frac{24}{100}$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{14}{100}$$

$$P(B) = ?$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{24}{100}, P(A \cap B) = \frac{24}{100} \times \frac{6}{10} = \frac{144}{1000}, \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{14}{100}$$

$$\frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{14}{100} \rightarrow \frac{P(B) - \frac{144}{1000}}{0.4} = \frac{14}{100} \rightarrow P(B) = 0.14 \times 0.4 + 0.144 = 0.2$$

۱۲۴- اگر نمره کسب شده معلمان در یک دوره ضمن خدمت براساس نمره‌ی صفر تا ۴، تنها به صورت عدد حسابی باشد، نوع متغیر تصادفی نمرات کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۹۴)

(۲) کمی گسسته

(۱) کمی پیوسته

(۴) کیفی ترتیبی

(۳) کیفی اسمی

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۵- میانگین و انحراف معیار ۶ داده آماری به ترتیب ۱۰ و ۲ است. اگر به همه داده‌ها ۶ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات به چه میزانی تغییر میکند؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش سال ۹۶)

-0/075 (۴)

+0/075 (۳)

-0/125 (۲)

+0/125 (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu_{new}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0.125$$

بنابراین، پاسخ مطلوب عبارتند از :

$$0.125 - 0.2 = -0.075$$

۱۲۶- اگر نقاط $A = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ روی محورهای مختصات نباشند و طول بردار \overline{AB} برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار x کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۱ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{(x-1)^2 + (1-x)^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان دوم}}$$

$$2 = (x-1)^2 + (1-x)^2 \rightarrow 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 + x^2 - 2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow 2x(x-2) = 0 \rightarrow \frac{x=0}{x=2}$$

چون نقاط روی محورهای مختصات نیست پس: $x = 2$

۱۲۷- میانگین سه داده یک رقمی برابر میانه آنها و انحراف معیارشان برابر $\sqrt{2}$ است اگر مجموع داده ها برابر ۱۸ باشد دامنه تغییرات داده ها کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$2\sqrt{2} \text{ (۴)}$$

$$2\sqrt{3} \text{ (۳)}$$

$$۳ \text{ (۲)}$$

$$۶ \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = 2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{(x_1 - 6)^2 + (6 - 2)^2}{3} = 2$$

$$\bar{x} = 6 \text{ میانه}$$

$$\frac{2(x_1 - 6)^2}{3} = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \sqrt{3} \\ x_3 = 6 + \sqrt{3} \end{cases}$$

۱۲۸- معادله $\frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{t-1} + \frac{1}{8}$ دارای چند جواب است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

(۴) بی شمار جواب دارد.

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) جواب ندارد.

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$D = R - \{1\}$$

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{t-1} + \frac{1}{8} \Rightarrow 8(t-1) \text{ طرفین ضرب در}$$

$$8(t+1) = 2(8) + (t-1) \Rightarrow$$

$$8t + 8 = 16 + t - 1 \Rightarrow 7t = 7 \Rightarrow t = 1$$

جزء دامنه نیست پس جواب ندارد.

۱۲۹- اگر در تابع $f = \{(1, -2), (3, 5), (7, 3a+1)\}$ تساوی $f(1) + f(7) = f(3)$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$۱ \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$۲ \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$f(1) + f(7) = f(3)$$

$$f(1) = -2, f(7) = 3a + 1, f(3) = 5 \Rightarrow -2 + 3a + 1 = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$$

$$a = 2$$

۱۳۰- اگر $\cos x = \sqrt{\frac{-\sin x}{1+3 \tan^2 x}}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ربع دایره مثلثاتی واقع است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

(۴) اول

(۳) چهارم

(۲) سوم

(۱) دوم

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\cos x = \sqrt{\frac{-\sin x}{1+3 \tan^2 x}}$$

حاصل رادیکال همیشه مثبت است لذا مقدار کسینوس مثبت است.

یا ناحیه یک یا ناحیه چهار

$$\cos x = \sqrt{\frac{-\sin x}{1+3(\tan^2 x)}} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{-\sin x}{1+3 \tan^2 x}$$

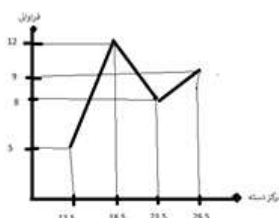
$$\Rightarrow \sin x = -(\cos^2 x)(1+3 \tan^2 x)$$

$$\sin x = -(\text{عدد مثبت}) = \text{عدد منفی}$$

لذا سینوس منفی است ناحیه ۳ یا ۴

از ترکیب این دو \Leftarrow ناحیه چهارم

۱۳۱- اگر دو داده به مقادیر ۱۹ و ۲۲ به داده های نمودار چند ضلعی زیر اضافه شود زاویه مربوط به دسته دوم در نمودار دایره ای برای داده های جدید کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)



www.e-estekhdam.com

۱۳۴(۴)

۱۴۰(۳)

۱۲۰(۲)

۱۳۰ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

دسته ها	فراوانی	فراوانی جدید
۱۶-۱۱	۵	۵
۲۱-۱۶	۱۲	۱۳
۲۶-۲۱	۸	۹
۳۱-۲۶	۹	۹

$$\frac{f_2}{n} \times 360 = \frac{13}{36} \times 360 = 130$$

۱۳۲- اگر I ماتریس واحد و $A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۸ (۴)

-۲ (۳)

-۶ (۲)

۴ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$|A| = (1)(-2) - (4)(1) = -6$$

۱۳۳- در داده های دسته بندی شده، مجموع فراوانی های نسبی کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

یک (۴)

(۳) مجموع کل فراوانی ها

(۲) بیشتر از یک

(۱) کمتر از یک

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}, \frac{n_4}{n}, \dots, \frac{n_n}{n}$$

$$S = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_4}{n} + \dots + \frac{n_n}{n}$$

$$S = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

۱۳۴- اگر $A = (1 + 0/1)(1 + (0/1)^2)(1 + (0/1)^4)$ باشد، عدد A دارای چند رقم اعشار است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۱۵ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۶ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$A = (1 + (0/1))(1 + (0/1)^2)(1 + (0/1)^4)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{10}\right) \left(1 + \frac{1}{100}\right) \left(1 + \frac{1}{10000}\right)$$

$$= \frac{11}{10} \times \frac{101}{100} \times \frac{10001}{10000} = \frac{11111111}{10000000} = 1/11111111$$

بنابراین A هفت رقم اعشار دارد. پس گزینه ی ۲ صحیح است.

۱۳۵- اگر بردار $\overrightarrow{QA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و بردار $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و بردار $\overrightarrow{CB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ باشد، بردار \overrightarrow{OC} کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ (۴)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (۳)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ (۲)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (b_1, b_2) - (1, 2) = (0, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 - 1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1 \\ b_2 - 2 = -1 \Rightarrow b_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow B = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B - C = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (1, 1) - (C_1, C_2) = (-1, 6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = 2 \\ 1 - C_2 = 6 \Rightarrow C_2 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

۱۳۶- در یک تصاعد هندسی، مجموع لگاریتم های سه جمله اول برابر ۹ است. جمله دوم این تصاعد کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$۱۰۰ \text{ (۴)}$$

$$۳ \text{ (۳)}$$

$$۲ \text{ (۲)}$$

$$۱۰۰۰ \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

فرض کنیم a_1 جمله اول و q قدر نسبت دنباله ی هندسی باشد در این صورت جمله ی دوم $a_1 q$ است داریم:

$$\log_{10} a_1 + \log_{10} a_1 q + \log_{10} a_1 q^2 = \log_{10} (a_1^3 q^3) = \log_{10} (a_1 q)^2 = 3 \log_{10} (a_1 q) = 9$$

$$\Rightarrow \log_{10} a_1 q = 3 \Rightarrow a_1 q = 10^3 = 1000$$

۱۳۷- معادله $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$ ، چند جواب دارد؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$۱ \text{ (۴)}$$

$$۳ \text{ بی شمار جواب دارد.}$$

$$۲ \text{ جواب ندارد.}$$

$$۲ \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

ابتدا مخرج مشترک دو کسر سمت چپ را محاسبه می کنیم.

با توجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$(1 + \sqrt{1-X})(1 - \sqrt{1-X}) = 1 - (1-X) = 1 - 1 + X = X$$

بنابراین:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1-X}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1-X}} = \frac{(1 - \sqrt{1-X}) + (1 + \sqrt{1-X})}{X} = \frac{2}{X}$$

با توجه به سمت راست تساوی داریم $\frac{\sqrt{3}}{X}$, $\frac{2}{X}$ که مشخص است معادله آخر جواب ندارد.

۱۳۸- معکوس تابع $f(x) = 3x + |x|$ به صورت $f^{-1}(x) = ax + b|x|$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۴) $-\frac{1}{3}$

۳) -3

۲) $\frac{1}{3}$

۱) 3

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$f(x) = 3x + |x| = \begin{cases} 3x + x = 4x & x \geq 0 \\ 3x - x = 2x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x & x < 0 \end{cases}$$

همچنین، ضابطه ی $f^{-1}(x) = ax + b|x|$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ax + bx = (a+b)x, & x \geq 0 \\ ax - bx = (a-b)x, & x < 0 \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{4} \\ a - b = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = \frac{3}{8}, \quad b = \frac{-1}{8}$$

$$\text{لذا } \frac{a}{b} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{-1}{8}} = -3$$

۱۳۹- منحنی y به صورت $y = x^2 + x + 1$ است. اگر مبدأ مختصات را به نقطه A انتقال دهیم، منحنی y در دستگاه جدید به صورت $y = x^2 + 5x + 8$ می‌شود. مختصات نقطه A کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۴) $(2, -1)$

۳) $(1, -2)$

۲) $(-2, 1)$

۱) $(-1, 2)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد. منحنی $Y = X^2 + X + 1$ را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$Y = X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

همچنین

$$Y = X^2 + 5X + X = \left(X + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

بنابراین رأس سهمی از $\frac{1}{2}$ به $\frac{5}{2}$ انتقال یافته است. همچنین $\frac{3}{4}$ تا $\frac{-7}{4}$ انتقال یافته است. پس

$$\begin{cases} X' + X_a = x \Rightarrow \frac{5}{2} + x_a = \frac{1}{2} \Rightarrow x_a = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \\ y' + y_a = y \Rightarrow \frac{-7}{4} + y_a = \frac{3}{4} \Rightarrow y_a = \frac{3}{4} - \frac{-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

بنابراین بخشهای انتقال یافته $(-2, -1)$ است.

۱۴۰- در یک مثلث قائم الزاویه، سینوس یکی از زاویه‌ها برابر $\frac{\sqrt{5}}{3}$ و طول ضلع مجاور این زاویه برابر ۲ است. اندازه وتر این مثلث کدام است؟
(فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۵ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

فرض کنیم $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ با توجه به اتحاد

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\rightarrow \frac{5}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

با توجه به اینکه $\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{BC}$ بنابراین :

$$\frac{2}{BC} = \frac{2}{3} \rightarrow BC = 3$$

۱۴۱- فراوانی تجمعی داده های آماری دسته بندی شده، بصورت جدول زیر است، فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

دسته ها	۹-۱۲	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴
فراوانی تجمعی	۱۲	۲۷	۴۵	۶۵	۷۲
	۰/۱۸ (۴)	۰/۲۵ (۳)	۰/۲۳ (۲)	۰/۲۰ (۱)	

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

دسته ها	9 - 12	12 - 15	15 - 18	18 - 21	21 - 24
فراوانی تجمعی	۱۲	۲۷	۴۵	۶۵	۷۲
فراوانی (f)	۱۲	۱۵	۱۸	۲۰	۷

$$\sum n = 72$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{n_3}{\sum n} = \frac{18}{72} = 0/25$$

۱۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و درایه سطر دوم و ستون اول A^2 برابر ۴ باشد، مقدار m کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$\sqrt{2}(۴) \quad 4 (۳) \quad -2(۲) \quad -\sqrt{2}(۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m^2 - 2 & -m + 2 \\ 2m - 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{چون } A_{21} = 4$$

$$2m - 4 = 4 \rightarrow 2m = 8 \rightarrow m = 4$$

۱۴۳- اگر نمودار فراوانی مطلق داده ها از دسته وسط به بعد نزولی باشد، نمودار فراوانی تجمعی چگونه تغییر می کند؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

- (۱) بستگی به فراوانی مطلق دسته های ما قبل دسته وسط دارد.
- (۲) ثابت
- (۳) نزولی
- (۴) صعودی

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

۱۴۴- فراوانی نسبی ۱۲۰ داده آماری که در ۵ دسته طبقه بندی شده، در جدول زیر ارائه شده است. اگر فراوانی نسبی دسته دوم، دو برابر فراوانی نسبی دسته چهارم باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۲۰ (۴)

۵ (۳)

۱۰ (۲)

۲۵ (۱)

دسته ها	1-7	7-13	13-19	19-25	25-31
فراوانی نسبی	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

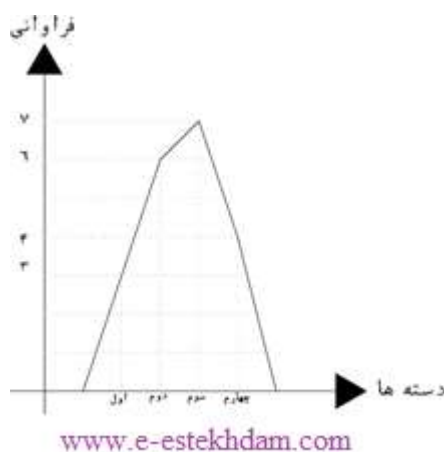
چرا که مجموع داده بایستی برابر ۱ شود پس داریم

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + a + b = 1 \rightarrow \frac{3}{4} + a + b = 1 \rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

$$a=2b \rightarrow b=\frac{1}{12}$$

$$120 \times \frac{1}{12} = 10$$

۱۴۵- در نمودار چندبر فراوانی زیر، زاویه مربوط به دسته سوم در نمودار دایره ای تهیه شده از این داده ها، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)



۱۲۶ (۴)

۵۴ (۳)

۶۳ (۲)

۱۰۸ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$n_1 = 3 = \text{فراوانی دسته یک}$$

$$n_2 = 6 = \text{فراوانی دسته دو}$$

$$n_3 = 7 = \text{فراوانی دسته سه}$$

$$n_4 = 4 = \text{فراوانی دسته چهار}$$

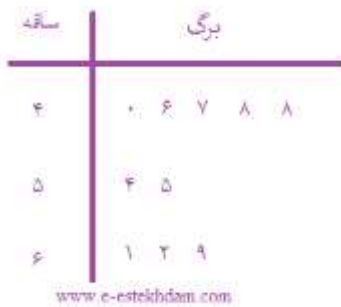
$$\sum n = 3 + 6 + 7 + 4 = 20$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{n_3}{\sum n} = \frac{7}{20} = 0.35$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{n_3}{\sum n} = \frac{7}{20} = 0.35$$

$$\text{زاویه} = 360 \times \text{فراوانی نسبی} = \frac{7}{20} \times 360 = 126$$

۱۴۶- در نمودار ساقه و برگ زیر، کلید نمودار ۵۶=۵۶ است. میانگین داده های آماری جدول، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)



۵۳/۴

۲/۴(۳)

۲۴(۲)

۵۳(۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد. یک نمودار ساقه و برگ ساده شامل دو ستون که با استفاده از یک خط عمودی جدا شده اند می شود. ستون سمت چپ ساقه ها و ستون سمت راست برگ ها را در بر می گیرد. در شکل بالا دهگان در سمت چپ و یکان، در سمت راست نمایش داده شده است پس:

$$۴۰+۴۶+۴۷+۴۸+۴۸+۵۴+۵۵+۶۱+۶۲+۶۹=۵۳۰/۱۰=۵۳$$

۱۴۷- در یک تصاعد حسابی جمله هفتم برابر 4 و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کمتر است. مجموع هشت جمله اول این تصاعد کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۷۰ (۴)

۴۲ (۳)

۴۹/۵ (۲)

۵۹/۵ (۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
7	6.5	6	5.5	5	4.5	4	3.5

$$\text{روش ۱} \quad S_n = (7 + 6.5 + 6 + 5.5 + 5 + 4.5 + 4 + 3.5) = 42$$

$$\text{روش ۲} \quad S_n = \frac{n[a_1 + a_n]}{2} \rightarrow S_8 = \frac{8(7 + 3.5)}{2} = 42$$

۱۴۸- اگر انحراف معیار داده های $X_1, X_2, \dots, X_{10}, 15$ برابر صفر باشد، میانه های زیر، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$49, 57, (X_1 + 1), (X_2 + 1), (X_3 + 1), \dots, (X_{10} + 1)$$

۴۹(۴)

۳۲(۳)

۳۱(۲)

۵۷(۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ؟ صحیح می باشد.

این سوال ایراد دارد. معلوم نیست میانه ی داده های به صورت $2(X_i + 1)$ را می خواهد یا داده های به صورت $2X_i + 1$.

برای هر دو حالت ذکر می شود:

راه حل :

با توجه به اینکه انحراف معیار داده ها صفر است، بنابراین همه ی داده ها برابرند

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{10} = 15$$

پس اگر داده ها به صورت $2(X_i + 1)$ باشند آن گاه میانه ی داده های

$$\underbrace{2(15 + 1), 2(15 + 1), \dots, 2(15 + 1)}_{\text{تا } 10}, \underbrace{49, 57}_{\text{تا } 2}$$

برابر با نصف داده های ششم و هفتم است.

$$\text{یعنی: } 32 = \frac{32+32}{2} \text{ اما اگر داده ها به صورت } 2X_i + 1 \text{ باشند آنگاه میانه ی داده های}$$

$$\underbrace{2(15) + 1, 2(15) + 1, \dots, 2(15) + 1}_{\text{تا } 10}, \underbrace{49, 57}_{\text{تا } 2}$$

برابر با نصف داده های ششم و هفتم است.

$$\text{یعنی: } 31 = \frac{31+31}{2}$$

۱۴۹- اگر $(a^2 - b, a) = (1, 2 - \frac{1}{a})$ باشد، نقطه $(-3a + 1, 2b^2 + b - 1)$ در کدام ناحیه از صفحه مختصات واقع است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

دوم (۴)

اول (۳)

چهارم (۲)

سوم (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$(a^2 - b, a) = (1, 2 - \frac{1}{a})$$

$$a^2 - b = 1 \quad \text{شماره ۱}$$

$$a^2 = 2a - 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a - 1)^2 = 0 \rightarrow a = +1 \rightarrow \text{شماره ۲} \quad a = 2 - \frac{1}{a}$$

با جایگذاری $a=1$ در رابطه شماره ۱ عدد b بدست می آید: $b=0$

$$A \mid \begin{cases} -3a + 1 = -2 \\ 2b^2 + b - 1 = -1 \end{cases}$$

بنابراین در ربع سوم قرار دارد.

۱۵۰- حاصل $10\sqrt[3]{1.024} - 5\sqrt[3]{250} - 30\sqrt[3]{1.458} + 20\sqrt[3]{0.686}$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$-4\sqrt[3]{2} \text{ (۴)}$$

$$-30\sqrt[3]{2} \text{ (۳)}$$

$$25\sqrt[3]{2} \text{ (۲)}$$

$$42\sqrt[3]{2} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$10\sqrt[3]{1.024} = 10\sqrt[3]{\frac{1024}{1000}} = \frac{10}{10}\sqrt[3]{128 * 8} = 2\sqrt[3]{128} = 2\sqrt[3]{64 * 2} = 8\sqrt[3]{2}$$

$$= 5\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{125 * 2} = 25\sqrt[3]{2}$$

$$30\sqrt[3]{1.458} = 30\sqrt[3]{\frac{1458}{1000}} = 3\sqrt[3]{729 * 2} = 3 * 9\sqrt[3]{2} = 27\sqrt[3]{2}$$

$$20\sqrt[3]{0.686} = 20\sqrt[3]{\frac{686}{1000}} = \frac{20}{10}\sqrt[3]{343 * 2} = 2 * 7\sqrt[3]{2} = 14\sqrt[3]{2}$$

$$= 8\sqrt[3]{2} - 25\sqrt[3]{2} - 27\sqrt[3]{2} + 14\sqrt[3]{2} = -30\sqrt[3]{2}$$

۱۵۱- فاصله مبدأ مختصات تا خط $y = ax + b$ برابر واحد است. اگر این خط از $(1, 2)$ بگذرد مقدار a کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$A(1, 2)$$

$$2 = a(1) + b$$

$$a + b = 2$$

$$om = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \quad \text{فاصله مبدأ تا خط}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (ax + b)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2x^2 + b^2 + 2abx = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (2ab)x + (b^2 - 1) = 0$$

$$\Delta = (2ab)^2 - 4(a^2 + 1)(b^2 - 1)$$

$$4a^2b^2 = 4(a^2 + 1)(b^2 - 1)$$

$$a^2b^2 = a^2b^2 - a^2 + b^2 - 1$$

$$b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$b = 2 - a$$

$$4a=3$$

$$A=3/4$$

۱۵۲- در کسر حاصل از گویا کردن مخرج $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}$ کدام عامل وجود دارد ؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$(\sqrt[3]{x^2} + y) \quad (۱)$$

$$(\sqrt[3]{x^2} - y) \quad (۲)$$

$$(\sqrt[3]{x^4} - y\sqrt[3]{x^2} + y^3) \quad (۳)$$

$$(\sqrt[3]{x^4} + y\sqrt[3]{x^2} + y^3) \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}-y}$$

نکته: مخرج اتحاد مزدوج می باشد:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

۱۵۳- رشته های معادله $4x^2 - 2mx - 1 = 0$ ، سینوس و کسینوس زاویه α هستند، مقدار مثبت m کدام است ؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$3\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

(۲) پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$m > 0 \text{ و } -2mx - 1 = 0 \text{ و } x^2$$

$$+ x_2 = \frac{-b}{a} x_1 = S \quad \text{حاصل جمع ریشه ها} \quad \begin{cases} x_1 = \sin \alpha \\ x_2 = \cos \alpha \end{cases} \quad \text{ریشه های معادله طبق}$$

$$P = x_1 * x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصلضرب ریشه ها} \quad \text{صورت سوال}$$

$$\text{رابطه ۱} \quad S = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2m}{4} = \frac{m}{2}$$

$$\text{رابطه ۲} \quad P = \sin \alpha * \cos \alpha = \frac{-1}{4}$$

$$\text{رابطه ۱ را به توان ۲ می‌رسانیم} \quad S^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$1 + 2\left(\frac{-1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{m^2}{4}$$

$$m^2 = 2$$

$$m = \pm \sqrt{2}$$

۱۵۴- اگر $f(-x) + (x+1)f(x) = x^2 + 4$ باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۵(۴)

۳(۳)

۱۳(۲)

۱۱ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$f(-x) + (x+1)f(x) = x^2 + 4$$

$$x = -1 \text{ اگر فرض کنیم } f(1) + (0)f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5 \rightarrow f(1) = 5$$

۱۵۵- حاصل ضرب وارون عدد $(3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ در عدد $(\sqrt{3\sqrt{3}} - 1)\sqrt[4]{27}$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۳ (۴)

۲۷(۳)

۹ - $\sqrt{3}$ (۲)

۶ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned} & (3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[4]{27} \times (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt{3}}}} \times \sqrt[4]{3^3} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}} \times \sqrt[4]{3^3} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{\sqrt[2]{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}}} \times \sqrt[4]{3^3} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1)$$

$$= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3\sqrt{3}-1}} \times \sqrt[4]{3^3} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1)$$

$$= \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

۱۵۶- اگر $\log 0.2 \cong 0.3$ و $\log 0.3 \cong 0.5$ باشد مقدار $\log_{27} 25$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

 $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۲) $\frac{14}{15}$ (۱)

(۲) پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\log_{17} 25 = \frac{\log 25}{\log 27} = \frac{2 \log 5}{3 \log 3} = \frac{2 \log \frac{10}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{2(\log 10 - \log 2)}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{14}{15}$$

۱۵۷- چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی اسمی هستند؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

I. میزان آلودگی هوا

II. رنگ میوه ها

III. زبان مادری

۲(۴)

۱(۳)

۰(۲)

۳(۱)

(۲) پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

۱۵۸- اگر داده ای نمودار ساقه و برگ زیر را در ۴ دسته، طبقه بندی کنیم. فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

ساقه	برگ
۰	۱ ۱ ۲
۱	۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۶ ۷ ۱ ۹
۲	۴ ۵ ۶ ۷ ۱ ۹ ۹ ۹
۰,۳(۴)	۰,۲۵(۳)
	۰,۴(۲)
	۰,۳۵(۱)

(۲) پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

ساقه	برگ	فراوانی f_i
۰ مرحله اول	1 1 2	۳
۱ مرحله دوم	3 4 4 5 6 6 7 8 9	۹
۲ مرحله سوم	4 5 6 7 8 9 9 9	۸
۳ مرحله چهارم		۰
		$\sum f_i = N = 20$

$$f_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{8}{20} = 0/4$$

۱۵۹- مبدأ مختصات را به نقطه (۵, ۲) انتقال می دهیم، معادله منحنی y در دستگاه جدید به صورت $y = x^2$ در آمده است. معادله منحنی y قبل از انتقال مبدأ، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

$$y = x^2 - 4x \quad (۲)$$

$$y = x^2 + 4x - 1 \quad (۱)$$

$$y = x^2 - 4x + 9 \quad (۴)$$

$$y = x^2 + 1 \quad (۳)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$x = X + 2 \quad \text{جدید}$$

$$y = Y + 5 \quad \text{جدید}$$

$$\rightarrow (y + 5) = (x + 2)^2 \quad y = x^2 \quad \text{معادله جدید}$$

$$Y + 5 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow y = x^2 + 4x - 1$$

۱۶۰- دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S هستند. اگر $P(A \cap B) = 1/6$ و $P(A) = 2/3$ باشد. مقدار $P(A \cap B')$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش سال ۹۷)

۳/۴ (۴)

۵/۶ (۳)

۱/۲ (۲)

۱/۳ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$P(A \cap B) = (A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{1}{2}$$

۱۶۱- حاصل $\sqrt[4]{14 - 4\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12}}$ ، کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

$\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح است. ابتدا توجه داریم که

$$14 - 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

پس

$$\sqrt[4]{14 - 4\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{14 - 4\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{(3\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \times \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{12 - 2} = \sqrt{10}$$

۱۶۲- مجموع عدد طبیعی n و ده برابر n، مساوی مربع عدد n است، مجموع ارقام n کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

۲ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۱۱ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است. معادله زیر برقرار است:

$$n^2 = n + 10n \Rightarrow n^2 - 11n \Rightarrow n^2 - 11n = 0$$

$$\Rightarrow n(n - 11) = 0$$

$$\Rightarrow n = 0 \text{ یا } n = 11$$

چون صفر عدد طبیعی نیست لذا $n = 11$ پذیرفتنی است که مجموع ارقام آن برابر با ۲ است.

۱۶۳- مجموعه برد تابع $f = \{(2.m^2 + n^2). (n.3). (-1.4). (2.8). (-1.2m)\}$ ، چند عضو دارد ؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

۵(۴)

۴(۳)

۳(۲)

۲(۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح است. چون f تابع است پس:

$$(2/m^2 + n^2) = (2/8) \Rightarrow m^2 + n^2 = 8$$

و

$$(-1/4) = (-1/2m) \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

با جایگذاری $m = 2$ در $m^2 + n^2 = 8$ داریم:

$$\Rightarrow n^2 + 4 = 8 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2 \quad m^2 + n^2 = 8$$

از طرفی $n=2$ پذیرفتنی نیست زیرا در این صورت در تابع f زوج های مرتب $(2,8)$ و $(2,3)$ وجود دارد که نشدنی است.

پس $(m=2)$ و $(n=-2)$ ، اکنون تابع f را می نویسیم:

$$f = \{(2,8) \text{ و } (-2,3) \text{ و } (-1,4)\}$$

بنابراین $R_f = \{8,3,4\}$ لذا برد f سه عضو دارد.

۱۶۴- در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات چهارم و هفتم، برابر ۸ است. حاصل ضرب جملات اول و دهم کدام است ؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

۱۶(۴)

۱۲(۳)

۸(۲)

۴(۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= a_1 q^3 \\ a_7 &= a_1 q^6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_4 \times a_7 = a_1^2 q^9 = 8$$

از طرفی

$$a_1 \times a_{10} = a_1 \times a_1 q^9 = a_1^2 \times q^9 = 8$$

۱۶۵- به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^2 + 8x + 3m^2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است ؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

۴(۴)

۵(۳)

۶(۲)

۷(۱)

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح است. به ازای $\Delta > 0$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد پس:

$$\Delta = 8^2 - 4(1)(3m^2) = 64 - 12m^2 > 0$$

بنابراین:

$$12m^2 < 64 \rightarrow 3m^2 < 16 \rightarrow m^2 < \frac{16}{3} \cong 5$$

بنابراین به ازای مقادیر صحیح $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ معادله ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۱۶۶- اگر $\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + m \tan x}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم واقع باشد، کدام مورد در خصوص مقادیر m صحیح است؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

(۱) $m < 0$ (۲) $m > 0$ (۳) $|m| > 1$ (۴) $|m| < 1$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح است.

$$\sqrt{1 + m \tan x} = \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 + m \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow m \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow m \tan x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow m \tan x = (\tan x)^2 \rightarrow m = \tan x, \tan x \neq 0$$

چون انتهای کمان x در ربع چهارم است و در آنجا مقدار $\tan x$ منفی است پس $m < 0$.

۱۶۷- در داده‌های دسته‌بندی شده، نسبت فراوانی تجمعی دسته آخر به تعداد کل داده‌ها، کدام است؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

(۱) کمتر از یک (۲) بیشتر یا مساوی یک (۳) یک (۴) بیشتر از یک

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح است.

۱۶۸- در جدول فراوانی نسبی زیر، افراد یک جامعه در هفت دسته طبقه‌بندی شده‌اند، در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، زاویه مربوط به دسته [17-23] چند درجه است؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

دسته‌ها	1-7	7-12	12-15	15-17	17-23	23-30	30-120
فراوانی نسبی	0.11	0.14	0.08	0.08	a	0.13	0.36
	۲۴(۴)		۳۰(۳)		۳۶(۲)		۴۰(۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح است. مجموع فراوانی‌های نسبی برابر با ۱ است، پس

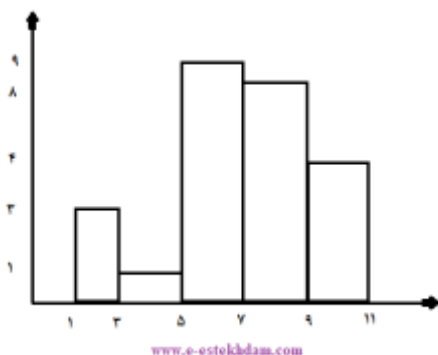
$$0.11 + 0.14 + 0.08 + a + 0.13 + 0.36 = 1$$

$$\Rightarrow a = 0.10$$

بنابراین اگر α زاویه‌ی مربوط در نمودار دایره‌ای متناظر باشد آنگاه

$$\frac{10}{100} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha = \frac{360 \times 10}{100} = 36$$

۱۶۹- میانگین داده های نمودار مستطیلی روبه رو کدام است ؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)



6/72(۴)

6/64(۳)

5/75(۲)

5/25(۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

دسته	[1-3)	[3-5)	[5-7)	[7-9)	[9-11)
مرکز دسته	2	4	6	8	10
فراوانی	3	1	9	8	4

بنابر این میانگین عبارت است از :

$$\frac{2 \times 3 + 4 \times 1 + 6 \times 9 + 8 \times 8 + 10 \times 4}{3 + 1 + 9 + 8 + 4} = \frac{168}{25} = 6.72$$

۱۷۰- اگر ۲۰٪ نمره درس آمار هر دانشجو به نمره اولیه او اضافه شود ، ضریب تغییرات نمرات جدید ، چند برابر ضریب تغییرات نمرات اولیه است ؟ (وزارت نیرو سال ۹۷)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح است. اگر به تعدادی داده ی آماری مقدار ثابتی اضافه شود، واریانس آن ها تغییر نمی کند اما به میانگین همان اندازه اضافه می شود پس :

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}}{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \frac{1.2\bar{x}_1}{\bar{x}_1} = 1.2$$

بخش دوم: اصل سوالات ریاضیات و آمار مقدماتی (برگزار شده توسط سایر مجریان آزمون‌ها)

۱- در یک کلاس مختلط ۶۰ نفری، ۳۵ مرد هستند که ۲۰ نفر آنها کمتر از ۲۰ سال دارند. در این کلاس کلاً ۲۵ نفر حداقل ۲۰ سال دارند. چند زن بالای ۲۰ سال در کلاس هستند؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

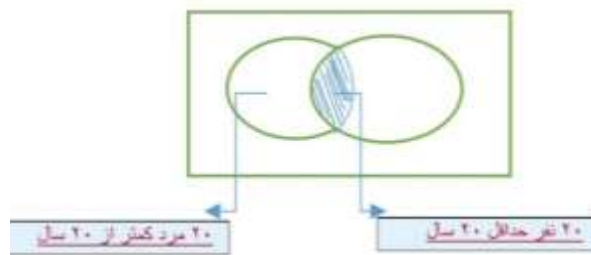
۱۰ (۴)

۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.



تعداد مردان بالای ۲۰ سال عبارت است از $35 - 20 = 15$ و تعداد زنان بالای ۲۰ سال عبارت است از $25 - 15 = 10$

۲- سه دانش آموز به طور مستقل روی یک مساله ریاضی کار می کنند اگر شانس موفقیت آن ها در حل مساله به ترتیب $0/3$ ، $0/4$ ، $0/5$ باشد احتمال این که هیچ یک نتواند به حل مساله دست یابند کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

۰,۱۲ (۴)

۰,۲۱ (۳)

۰,۲۵ (۲)

۰,۳۲ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \times P(B') \times P(C') = 0.5 \times 0.6 \times 0.7 = 0.21$$

۳- دو تاس را پرتاب می کنیم. احتمال این که خال های ۳ و ۴ را مشاهده کنیم در حالی که بدانیم مجموع خال ها ۷ است کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

 $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$S = \sqrt{(1.6)(2.5)(3.4)(4.3)(5.2)(6.1)}$$

$$N(s) = 6$$

$$p = \frac{1}{n(s)} = \frac{1}{6}$$

۴- دو جعبه یکسان داریم. جعبه اول شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و جعبه دوم ۸ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. یک جعبه به تصادف انتخاب و یک مهره از آن اختیار می کنیم. احتمال این که مهره سفید باشد، کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$\frac{11}{24} \text{ (۱)} \quad \frac{13}{24} \text{ (۲)} \quad \frac{11}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{62} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{12} = \frac{5}{24} + \frac{8}{24} = \frac{13}{24}$$

۵- اگر ۵ میانگین داده های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 باشد، میانگین داده های $2x_1+x_2, 2x_2+x_3, 2x_3+x_4, 2x_4+x_1$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$15 \text{ (۱)} \quad 11 \text{ (۲)} \quad 10 \text{ (۳)} \quad 5 \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$(2x_1 + x_2) + (2x_2 + x_3) + (2x_3 + x_4) + (2x_4 + x_1) = (2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\rightarrow 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4$$

تمام داده ها ضرب در ۳ شده اند پس میانگین نیز ۳ برابر می شود یعنی ۱۵

۶- اگر ضریب تغییرات نمونه الف، ۴ برابر ضریب نمونه ب و میانگین نمونه ها با هم برابر باشد، انحراف معیار نمونه الف، چند برابر انحراف معیار نمونه ب خواهد بود؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad 2 \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$CV_{\text{الف}} = 4CV_{\text{ب}}$$

$$\bar{X}_{\text{الف}} = \bar{X}_{\text{ب}}$$

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \rightarrow \frac{S_{\text{الف}}}{S_{\text{ب}}} = \frac{\bar{X}_{\text{الف}} CV_{\text{الف}}}{\bar{X}_{\text{ب}} CV_{\text{ب}}} = \frac{4CV_{\text{ب}}}{CV_{\text{ب}}} = 4$$

۷- با انجام یک آزمایش تصادفی، تنها یکی از پیشامدهای A_1, A_2, A_3 رخ می دهد. احتمال رخ دادن پیشامد A_1 اگر $P(A_3) = 2P(A_2) = 3P(A_1)$ باشد، کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\frac{3}{11} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{11} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{11} \text{ (۳)} \quad \frac{6}{11} \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$P(A_3) = 2P(A_2) = 3P(A_1)$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 \rightarrow P(A_1) + \frac{3}{2}P(A_1) + 3P(A_1) = 1 \rightarrow \frac{11}{2}P(A_1) = 1 \rightarrow P(A_1) = \frac{2}{11}$$

۸- اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(B) = 0.9$, $P(A|B) = 0/2$, $P(A|\bar{B}) = 0/7$, آنگاه مقدار $P(A)$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) ۰,۲۵ (۲) ۰,۳۵ (۳) ۰,۱۱ (۴) ۰,۸۸

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{10} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times 0.2 = 0.9 \times 0.2 = 0.18$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{7}{10} \rightarrow P(A \cap B') = P(B') \times 0.7 = 0.1 \times 0.7 = 0.07$$

از طرفی داریم:

$$P(B) = \frac{9}{10} \rightarrow P(B') = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

در نتیجه:

$$0.07 = P(A) - 0.18 \rightarrow P(A) = 0.07 + 0.18 = 0.25$$

۹- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت جدول زیر می باشد. میانگین X کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

X	-۲	-۱	۳
P(X=x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$ (۴)	$\frac{1}{6}$ (۳)	$\frac{2}{3}$ (۲) صفر (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\sum_{i=1}^3 x p(x=i) = (-2 \times \frac{1}{3}) + (-1) (\frac{1}{6}) + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{-2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

۱۰- کدام یک از شاخص های آماری بدون واحد است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

(۱) ضریب تغییرات (۲) دامنه تغییرات

(۳) میانگین (۴) واریانس

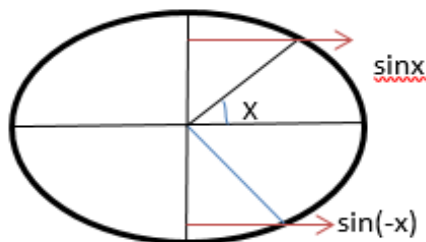
• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۱- اگر $\ln x$ به معنای لگاریتم طبیعی x باشد، برای کدام یک از توابع زیر، تساوی $f(-x) = -f(x)$ برقرار است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

(۱) $f(x) = e^x$ (۲) $f(x) = \ln x$

(۳) $f(x) = \cos x$ (۴) $f(x) = \sin x$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: طبق شکل زیر می توان گفت بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



www.e-estekhdam.com

۱۲- کدام معادله نسبت به مبدأ، متقارن است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$y = (x - 1)^3 + 1 \quad (۲)$$

$$y = (x^2 + 1)^3 + 1 \quad (۱)$$

$$y = -x^5 + 3x \quad (۴)$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (۳)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$y = -x^5 + 3x \xrightarrow{x \rightarrow (-x)} -y = -((-x^5)) + 3(-x) = x^5 - 3x \rightarrow y = -x^5 + 3x$$

بنابراین با جایگذاری $x \rightarrow (-x)$ و $y \rightarrow (-y)$ معادله تغییر نکرد. لذا این معادله نسبت به مبدأ متقارن است.

۱۳- کدام کسر از همه بزرگتر است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{5} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۴- اگر A, B دو مجموعه غیر تهی باشند، آنگاه مجموعه $A - (A - B)$ برابر کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$B \cap A \quad (۴)$$

$$A - B \quad (۳)$$

$$B \quad (۲)$$

$$A \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۵- باقیمانده تقسیم $-2x^2 - 3x + 1$ بر $x + 2$ کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$-1 \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$-۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{array}{r|l} -2x^2 - 3x + 1 & x + 2 \\ -(-2x^2 - 4x) & -2x + 1 \\ \hline x + 1 & \\ -(x + 2) & \\ \hline -1 & \end{array}$$

باقیمانده

۱۶- مشتق تابع $y = \frac{1}{x}$ کدام گزینه است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) $-x$ (۲) $-x-1$ (۳) $-x-2$ (۴) $-x^2$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه؟ صحیح است.

$$y' = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

۱۷- مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصلضرب ارقام این عدد کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$8 + 4 = 12, 8 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow 8 \times 4 = 32$$

۱۸- سه نقطه $A(1,3)$ و $B(5,6)$ و $C(8,2)$ رئوس یک مثلث.... است. (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) متساوی الساقین (۲) متساوی الاضلاع
(۳) قائم الزاویه (۴) هیچکدام

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۹- مجموعه دو عدد ۳۰ و نسبت آنها $\frac{2}{3}$ می باشد. تفاضل آن دو عدد برابر است با: (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۱۸

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$a + b = 30$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3a = 2b, 3a - 2b = 0$$

$$a - b = ?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ a + b = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 2a + 2b = 60 \end{cases} \Rightarrow 5a = 60 \Rightarrow a = 12$$

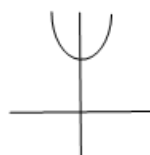
$$\Rightarrow \frac{12}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 18$$

۲۰- برد تابع $y = |x^2 + 2|$ کدامیک از موارد زیر می باشد؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $y > 0$ (۲) $x \geq 0$ (۳) $x \geq 2$ (۴) $y > 2$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه؟ صحیح است.

برد تابع $y \geq 2$ است که در هیچ کدام از گزینه ها وجود دارد.



$$Y = |x^2 + 2|$$

۲۱- دامنه تابع $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ کدامیک از موارد زیر می باشد؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $x \in \mathbb{R}$ (۲) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $x \in \mathbb{Z} - \{1\}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

بنابراین، پاسخ صحیح $\mathbb{R} - \{1\}$ یا همان گزینه ۲ است.

۲۲- اگر دامنه تابع $Y = \sqrt{\frac{\sin \sqrt{X}}{X}}$ به صورت بازه (a, b) باشد مقدار $a+b+1$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

- (۱) n^2 (۲) $n^2 + 1$ (۳) $2n$ (۴) $2n+1$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$D_y = x \neq 0$$

$$X \in (2k, 2k+1) \pi \Rightarrow D_y = (0/1) \pi$$

لذا حاصل جمع $a+b$ همواره فرد است. پس $a + b + 1$ همواره زوج است. بنابراین، گزینه ی ۳ صحیح است.

۲۳- دامنه تابع $y = (\log(x-2))^x$ کدامیک از موارد زیر می باشد؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $x < 2$ (۲) $x \in \mathbb{R}$ (۳) $x > 2$ (۴) $x > 0$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$Y = (\log(x-2)) \times x \Rightarrow D_y : \{x: x-2 > 0\} = \{x: x > 2\}$$

۲۴- فرض کنید $y = 4 + \sqrt{2x}$ دامنه (D) و برد (R) تابع کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

- (۱) $R = [0, \infty), D = \mathbb{R}$ (۲) $R = [4, \infty), D = [0, \infty)$

- (۳) $R = [0, \infty), D = [0, \infty)$ (۴) $R = [4, \infty), D = (0, \infty)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۲۵- برد تابع $f(x) = \begin{cases} 1+x^4 & x \leq -1 \\ \frac{1+x^4}{2+x^4} & x > -1 \end{cases}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) $[1/2, +\infty)$ (۲) $[1/2, 1)$

- (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $[1/2, 1) \cup [2, +\infty)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$X \leq -1 \rightarrow X^4 \geq 1 \rightarrow X^4 + 1 \geq 2 \rightarrow Y \geq 2$$

$$\frac{1+X^4}{2+X^4} = \frac{2+X^4}{2+X^4} - \frac{1}{2+X^4} = 1 - \frac{1}{2+X^4} \rightarrow Y < 1$$

$$X > -1 \rightarrow X^4 \geq 0 \rightarrow X^4 + 2 \geq 2 \rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{X^4+2}$$

$$Y \geq \frac{1}{2} \leftarrow 1 - \frac{1}{X^4+2} \geq 1 - \frac{1}{2}$$

پس از روابط نتیجه می‌شود:

$$R_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$$

۲۶- مجموعه جواب نامعادله $(x+1) > \frac{1}{(x+1)}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

(۱) $(-2, 1) \cup (0, +\infty)$ (۲) $(-1, 0) \cup (-\infty, 2)$

(۳) $[-2] \cup [0, +\infty - \infty)$ (۴) $(-2, 0)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$> \frac{1}{x+1} \rightarrow (x+1)^2 > 1, x \neq -1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 > 1, x \neq -1$$

$$\rightarrow x^2 + 2x > 0, x \neq -1 \rightarrow x(x+2) > 0, x \neq -1 \rightarrow x \leq -2, x \geq 0, x \neq -1$$

۲۷- مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 6x \leq 7$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

(۱) $[-1, 7]$ (۲) $[-7, 1]$

(۳) $(\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$x^2 - 6x \leq 7 \rightarrow x^2 - 6x - 7 \leq 0 \rightarrow (x-7)(x+1) \leq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 7$$

۲۸- جواب معادله توانی $2^{3x} = \frac{1}{64}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$2^{3x} = \frac{1}{64} \rightarrow 2^{3x} = \frac{1}{2^6} \rightarrow 2^{3x} \times 2^6 = 1 \rightarrow 2^{3x+6} = 2 \rightarrow 3x+6 = 0 \rightarrow 3x = -6 \rightarrow x = -2$$

۲۹- عدد بعدی در دنباله زیر برابر است با؟ (راه آهن سال ۹۴)

1, -3, 9, ?

(۱) 27 (۲) -27 (۳) 81 (۴) -81

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این دنباله که هر عدد برابر است با عدد قبلی ضرب در (-۳) پس عدد بعدی برابر است با $9 \times (-3) = -27$

۳۰- جمله پنجم یک دنباله حسابی، دو برابر جمله هفتم آن است. کدام مورد صحیح است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

- (۱) جمله نهم، نصف جمله هفتم است.
 (۲) جمله نهم، برابر صفر است.
 (۳) جمله چهارم، دو برابر جمله نهم است.
 (۴) جمله نهم، نصف جمله ششم است.

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$a_5 = 2a_7 \rightarrow a_1 + 4d = 2(a_1 + 6d) \rightarrow a_1 + 4d = 2a_1 + 12d \rightarrow a_1 = -8d$$

$$a_9 = a_1 + 8d \rightarrow a_9 = -8d + 8d = 0$$

۳۱- اگر $\ln x$ به معنی لگاریتم طبیعی x باشد آنگاه $\ln(x-2) < 0$ اگر و فقط اگر (شهرداری ها سال ۹۲)

- (۱) $0 < x < 3$ (۲) $2 < x < 3$ (۳) $x < 3$ (۴) $2 < x$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

ابتدا دامنه تابع را محاسبه می کنیم:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad (1)$$

$$\ln(x - 2) < 0 \Rightarrow x - 2 < e^0 = 1 \Rightarrow x < 3 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که $2 < x < 3$ ؛ بنابراین، گزینه ۲ صحیح می باشد.

۳۲- رابطه $\log_7(x) = \log_7(x^2 - 2)$ مقدار x برابر است با؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $x = 2$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) گزینه ۱ و ۳

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\log_7(x^2 - 1) = \log_7^x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

۳۳- اگر $\frac{1}{3} \log 8 + \frac{2}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log 40$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

- (۱) $\log 25$ (۲) $\log 20$ (۳) $\log 15$ (۴) $\log 10$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log 8 + \frac{2}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log 40 &= \frac{1}{3} \log 2^3 + \frac{2}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log (5 \times 8) \\ &= \frac{1}{3} \log^2 + \frac{2}{3} \log^5 + \frac{1}{3} (\log^5 + \log^8) \\ &= \log^2 + \frac{2}{3} \log^5 + \frac{1}{3} \log^5 + \frac{1}{3} \log^8 \\ &= \log^2 + \log^5 + \log^2 \\ &= \log^{(2 \times 2 \times 5)} = \log^{20} \end{aligned}$$

۳۴- مقدار $\sin(\pi+x)$ برابر با کدامیک از موارد زیر می باشد؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $\cos(x)$ (۲) $\sin(x)$ (۳) $-\cos(x)$ (۴) $-\sin(x)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\sin(\pi+x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = -\sin x$$

۳۵- به ازای کدامیک از مقادیر زیر مقدار تابع $y = \sin(5x)$ برابر با صفر خواهد شد؟ (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) $\frac{2\pi}{10}$ (۲) $\frac{\pi}{10}$ (۳) $\frac{3\pi}{16}$ (۴) گزینه ۱ و ۲

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\sin(5x) = 0 \Rightarrow 5x = k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}, k = 0, 1, 2, \dots$$

به ازای $k=1$ داریم: $x = \frac{x}{5} = \frac{2k}{10}$ ؛ بنابراین، گزینه ۱ صحیح می باشد.

۳۶- مشتق تابع $y = e^x$ کدام گزینه زیر است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) e (۲) x (۳) e^x (۴) این تابع مشتق ندارد

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۳۷- مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) $-\frac{3\cot 3x}{\sin 3x}$ (۲) $\frac{\tan 3x}{3(\sin 3x)^2}$
(۳) $\frac{3\cot 3x}{\sin 3x}$ (۴) $-\frac{\tan 3x}{3(\sin 3x)^2}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin 3x} &= \frac{-3 \cos 3x}{\sin 3x \times \sin 3x} = -3 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{\sin 3x} \\ &= -3 \cot 3x \times \frac{1}{\sin 3x} = -3 \frac{\cot 3x}{\sin 3x} \end{aligned}$$

۳۸- مشتق تابع $f(x) = \frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

- (۱) $\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ (۲) $\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$
(۳) $-\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ (۴) $-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$F(x) = \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(x+1) - (2+\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1-2-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

۳۹- اگر $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ چقدر است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) $\frac{a}{b}$ (۲) $\frac{b}{c}$ (۳) $\frac{a}{c}$ (۴) $\frac{c}{a}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

چون $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ پس $b^2 = ac$ لذا:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ac}{ac + c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c}$$

۴۰- اگر $a=2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{(1-a)^2}$ کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{(1-a)^2} \xrightarrow{a=2} \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$$

۴۱- اگر ۳۰ درصد A برابر ۴۰ درصد B باشد نسبت A به B کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{30}{100}A = \frac{40}{100}B \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

۴۲- اگر باقی مانده تقسیم $(x+k)(x+2)$ بر $(x-1)$ برابر ۱۲ شود، آنگاه مقدار k کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

(۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

حاصل $(X+4)(X+2)$ برابر است با $x^2 + (k+2)x + 2k$ پس:

باقیمانده تقسیم فوق برابر با $3K+3$ است.

$$\begin{array}{r|l} X^2 + (K+2)X + 2K & X-1 \\ -X^2 + X & \\ \hline & X \end{array}$$

که طبق فرض برابر با ۱۲ است یعنی

$$K+3+2K=3K+3$$

$$3K+3=12 \rightarrow 3K=9 \rightarrow K=3$$

۴۳- در صورتی که $x \in \mathbb{R}$ کدام یک از روابط مقابل، یک تابع است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$f = \{ (x, y) : a) y = |x| \}$$

$$f = \{ (x, y) : b) x = |y| \}$$

$$f = \{ (x, y) : c) y = 5x - 3 \}$$

$$f = \{ (x, y) : d) x = y^2 \}$$

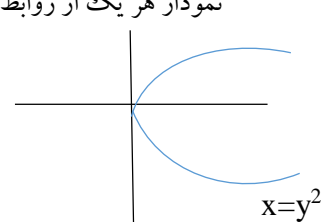
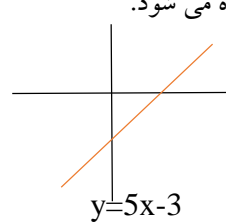
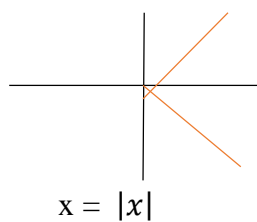
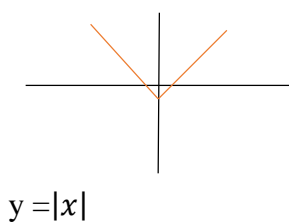
c, a (۴)

b, a (۳)

d, a (۲)

c, b (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.



همانطوری که کشیده می شود نمودارهای اول و سوم از چپ نمایش دهنده ی تابع هستند. بنابراین گزینه ی ۴ صحیح است.

۴۴- اگر رابطه $f = \{ (1, 2), (m+2, n+3), (1, m+1), (3, 4) \}$ یک تابع باشد، آنگاه مقدار $m+n$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$f = \{ (1, 2), (m+2, n+3), (1, m+1), (3, 4) \}$$

$$(*) : (1, 2) = (1, m+1) \rightarrow m+1 = 2 \rightarrow m = 1$$

$$(**) : (m+2, n+3) = (3, 4) \xrightarrow{m=1} (3, n+3) = (3, 4) \rightarrow n+3 = 4 \rightarrow n = 1$$

بنابراین مقدار $m+n=2$

۴۵- اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$ باشد، $f(2x)$ کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

$$\frac{2x+1}{2x} \quad (۴)$$

$$\frac{2x}{2x+1} \quad (۳)$$

$$\frac{x}{2x+1} \quad (۲)$$

$$\frac{2x}{x+1} \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

$$f(2x) = \frac{2x}{2x+1}$$

۴۶- اگر $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = 3x-2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

۳۱ (۴)

۱۶ (۳)

۲۵ (۲)

۴ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\frac{x+1}{y} = 2 \rightarrow x+1 = 10 \rightarrow x = 9$$

$$f(2) = f\left(\frac{9+1}{5}\right) = 3(9) - 2 = 25$$

۴۷- اگر $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = \ln\sqrt{x}$ ، آنگاه $f(g(x))$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

 $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (۳) $\frac{-x}{2}$ (۲) $\frac{-1}{\sqrt{x}}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$f(g(x)) = e^{-\ln x} = e^{\ln(\sqrt{x})^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

۴۸- اگر $f(x) = x^5 - 1$ ، آنگاه مقدار $f^{-1}(x)$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

 $\sqrt[5]{x+1}$ (۴) $\sqrt[5]{x} + 1$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$y = x^5 - 1 \rightarrow x^5 = y + 1 \rightarrow x = \sqrt[5]{y+1} \rightarrow y = \sqrt[5]{x+1}$$

۴۹- اگر $f(x) = x^2(1+x^3)(1+x^5)$ آنگاه حاصل $f'(0)$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$F(x) = x^2(1+x^3)(1+x^5) = (x^2+x^5)(1+x^5) = x^2+x^7+x^5+x^{10}$$

$$= x^{10} + x^7 + x^5 + x^2$$

$$F'(x) = 10x^9 + 7x^6 + 5x^4 + 2x$$

$$F'(x) = 90x^8 + 64x^5 + 20x^3 + 2 \Rightarrow F'(0) = 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = \frac{-2}{x^3} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{x^3} \times \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{-2}{x^3} \times \frac{x}{2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{-1}{4}$$

۵۰- فرض کنید $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{4}$ باشند، تابع $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{32} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{64} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{4} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \times 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 = \frac{3}{8}$$

۵۱- برای کدام مقدار از k تابع $f(x) = x + \frac{k}{x}$ در نقطه $x = -2$ ، دارای ماکزیمم نسبی است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$k = -4 \text{ (۴)}$$

$$k = 4 \text{ (۳)}$$

$$k = -2 \text{ (۲)}$$

$$k = 2 \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$f(x) = x + \frac{k}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2} \Rightarrow f'(-2) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{k}{4} = 0 \Rightarrow \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

۵۲- مقدار میانگین تابع $f(x) = e^x$ روی بازه $[\ln a, \ln b]$ برای $0 < a < b$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$\frac{\ln a - \ln b}{b - a} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} \text{ (۳)}$$

$$\frac{b - a}{\ln a - \ln b} \text{ (۲)}$$

$$\frac{b - a}{\ln b - \ln a} \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

چون e^x در بازه $[\ln a, \ln b]$ مشتق پذیر است، پس نقطه ای مانند $C \in [\ln a, \ln b]$ وجود دارد بطوریکه:

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{e^{\ln b} - e^{\ln a}}{\ln b - \ln a} = \frac{b - a}{\ln b - \ln a}$$

۵۳- معادله خط مماس بر تابع $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ در نقطه $x=2$ کدام است (شهرداری ها سال ۹۱)

$$y = -8x - 9 \text{ (۴)}$$

$$y = 8x - 24 \text{ (۳)}$$

$$y = -8x + 1 \text{ (۲)}$$

$$y = 8x + 16 \text{ (۱)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ؟ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-3) - (x+5)}{(x-3)^2} = \frac{-8}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(2) = -8$$

بنابراین شیب خط مماس برابر با -8 است، خط مماس از نقطه $(2, f(2)) = (2, -7)$ می گذرد، پس:

$$y - (-7) = -8(x - 2) \Rightarrow y + 7 = -8x + 16 \Rightarrow y = -8x + 9$$

۵۴- معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{x + \ln x}$ در نقطه $x=1$ برابر است با ؟ (استاندارداری ها سال ۹۱)

$$y = \frac{1}{x} \text{ (۴)}$$

$$y = x \text{ (۳)}$$

$$y = \frac{e}{x} \text{ (۲)}$$

$$y = 2x + e \text{ (۱)}$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$y = \sqrt{x + \ln x} \Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{1}{x}}{2\sqrt{x + \ln x}} \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$$

شیب خط برابر با یک است این خط از نقطه ی (1.1) = (1. y(1)) می گذرد، پس:

$$y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

۵۵- در کدام نقاط از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ خط مماس عمود بر خط $y = \frac{x}{9} - 0$ است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\pm\sqrt{3} \quad (۱) \quad \pm\sqrt{2} \quad (۲) \quad \pm 2 \quad (۳) \quad \pm 3 \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\frac{x}{9} - y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{9} \Rightarrow y' = \frac{1}{9}$$

بنابراین شیب خط عمود برابر با ۹- است یعنی:

$$y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = -9 \Rightarrow y' = 3x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = -2$$

۵۶- اگر $f'(x) = 1 + \ln x$ آنگاه $f(x)$ برابر با کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$\ln x + C \quad (۱) \quad x \ln x + C \quad (۲) \quad x + \ln x + C \quad (۳) \quad x - \ln x + C \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$f(x) = \int (1 + \ln x) dx = \int dx + \int \ln x dx = x + x \ln x - x + c = x \ln x + c$$

۵۷- حاصل انتگرال $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\ln x + C \quad (۱) \quad x \ln x + C \quad (۲)$$

$$\frac{\ln(\ln x)}{x} + C \quad (۳) \quad \ln(\ln x) + C \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \xrightarrow{u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx} \int \frac{1}{u} du = \ln u + c \xrightarrow{u = \ln x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) + c$$

۵۸- حاصل انتگرال $\int \frac{x}{(x^2+2)^{-2}} dx$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\frac{1}{6}(x^2+2)^3 \quad (۱) \quad \frac{1}{2}(x^2+2)^1 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}(x^2+2)^1 \quad (۳) \quad \frac{1}{6}(x^2+2)^3 \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^{-2}} dx \xrightarrow{u=x^2+2, du=2xdx} \int \frac{x}{(x^2+2)^{-2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(x^2+2)^{-2}} = \int \frac{du}{u^{-2}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} u^3 + c \right\} = \frac{1}{6} u^3 + c = \frac{1}{6} (x^2+2)^3 + c$$

۵۹- مقدار $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

$$\frac{70}{15} \quad (۱) \quad \frac{116}{15} \quad (۲) \quad \frac{126}{15} \quad (۳) \quad \frac{186}{15} \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx \rightarrow \begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ \Rightarrow x = u-1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \int_1^4 (u-1)\sqrt{u} du$$

$$= \int_1^4 u\sqrt{u} du - \int_1^4 \sqrt{u} du = \int_1^4 u^{\frac{3}{2}} du - \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{116}{15}$$

۶۰- مساحت محصور بین منحنی $y = x^2 + 2x + 1$ و $y = 2x + 5$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

$$\frac{32}{3} \quad (۱) \quad \frac{28}{3} \quad (۲) \quad \frac{16}{3} \quad (۳) \quad \frac{8}{3} \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$y = 2x + 5$$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

$$s = \int_{-2}^2 2x + 5 - x^2 - 2x - 1 dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = 4x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} - \left(\frac{-8}{1} + \frac{8}{3} \right)$$

$$= 8 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

۶۱- سطح محصور بین منحنی $y = x^2 + 1$ ، محور ها، $X=1$ و $X=3$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$11 \quad (۱) \quad 8 \quad (۲) \quad \frac{35}{3} \quad (۳) \quad \frac{32}{3} \quad (۴)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$s = \int_1^3 (x^2 + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x \int_1^3 = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

۶۲- مساحت سطح محصور بین منحنی $y = 4x - x^2$ و محور X ها کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) $\frac{32}{3}$ (۲) $\frac{25}{8}$ (۳) ۸ (۴) ۱۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$s = \int_0^4 4x - x^2 dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \int_0^4 = 32 - \frac{6}{3} = \frac{32}{3}$$

۶۳- حاصل انتگرال $\int_0^2 2^x dx$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) $\frac{4}{\ln 2}$ (۲) $\frac{3}{\ln 2}$ (۳) $\frac{2}{\ln 2}$ (۴) $\frac{1}{\ln 2}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c = \int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \int_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$$

۶۴- دترمینان ماتریس $y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ برابر است با: (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) ۲ (۲) -۱۰ (۳) -۶ (۴) ۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |y| = -2 - (-2)(-4) = -2 - 8 = -10$$

۶۵- مقدار y در رابطه برابر $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ است با: (راه آهن سال ۹۴)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۲۰ (۴) ۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{array}{rcl} 2x - y = 6 & & 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 & \Rightarrow & -2x + 2y = 8 \Rightarrow y = 14 \end{array}$$

۶۶- اگر $A = \{2,3,4,5,6\}$ و $B = \{1,2,3,4,7\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - A$ کدام است؟ (استانداری ها سال ۹۱)

- (۱) $\{5,6\}$ (۲) $\{1,7\}$ (۳) $\{7\}$ (۴) \emptyset

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \Rightarrow (A \cup B) - A = \{1,2,3,4,5,6,7\} - \{2,3,4,5,6\} = \{1,7\}$$

۶۷- اگر $A \subset B$ باشد، کدام رابطه صحیح نیست؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \quad (۲)$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \quad (۱)$$

$$(A \cup B) \cap (A \cap B) = B \quad (۴)$$

$$(A \cup B) \cup (A \cap B) = B \quad (۳)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

۶۸- جمله دهم یک تصاعد عددی از جمله سوم آن ۴۲ واحد کمتر است. قدر نسبت چقدر است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$-۴ \quad (۴)$$

$$-۶ \quad (۳)$$

$$-۲ \quad (۲)$$

$$-۳ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$a_3 - a_{10} = 42$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d$$

$$\Rightarrow a_1 + 2d - a_1 - 9d = 42$$

$$\Rightarrow -7d = 42$$

$$\Rightarrow d = -6$$

۶۹- واریانس اعداد ۱۹ و ۱۶ و ۱۳ و ۱۰ و ۷ کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$۱۸ \quad (۴)$$

$$۱۵ \quad (۳)$$

$$۱۲ \quad (۲)$$

$$۹ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{میانگین} = \frac{19+16+13+10+7}{5} = 13$$

$$\sigma^2 = \frac{(19-12)^2 + (16-13)^2 + (13-13)^2 + (10-13)^2 + (7-13)^2}{5}$$

$$= \frac{36 + 9 + 9 + 36}{5} = 18$$

۷۰- میانگین ۲۰ داده آماری برابر ۱۵ و واریانس آنها برابر ۲/۲۵ می باشد. ضریب تغییرات آنها چقدر است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$۲۰ \quad (۴)$$

$$۱۶ \quad (۳)$$

$$۱۳ \quad (۲)$$

$$۱۰ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\mu = 15$$

$$\sigma^2 = 2.25$$

$$C_v = \frac{1.5}{15} = 0.1$$

$$\Rightarrow = 10$$

۷۱- میانگین سن یک گروه ۱۲ سال و ضریب تغییرات سن آنان ۲۰ درصد است. انحراف معیار سن آنان چقدر است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$

$$۲/۴ \quad (۲)$$

$$۰/۰۶ \quad (۱)$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\mu = 12$$

$$C_v = 20\% = 0.2$$

$$0.2 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 2.4$$

۷۲- مجموعه اشیاء یا نمودهایی که یک یا چند صفت مشترک داشته باشند و یکجا در نظر گرفته شوند..... می نامند. (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) چارچوب نمونه گیری
(۲) توزیع نمونه گیری
(۳) واحد نمونه گیری
(۴) جامعه آماری

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

۷۳- نمای اعداد ۹، ۱۴، ۱۰، ۵، ۹، ۳ و ۲ کدام عدد می باشد؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۴

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۷۴- تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ۱۰ عضوی کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۸ (۳) ۴۵ (۴) ۹۰

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10(10-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

۷۵- اگر $A \subset B \subset C$ ، $\bar{C} = \emptyset$ باشد، حاصل $(\bar{A} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

- (۱) $A - B$ (۲) $A - \bar{B}$ (۳) $\bar{B}A$ (۴) $B \bar{A}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

چون C پریم مساوی با تهی می باشد پس C مجموعه همانی است لذا:

$$(A \cup B)' \cap (A' \cup B)' = (A' \cap B) \cap (A \cap B') = (A \cap A') \cap (B \cap B') = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

۷۶- اگر $A \cap B' = \emptyset$ باشد حاصل $A \cap B$ کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) A (۲) B (۳) \emptyset (۴) B'

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

از اینکه $A \cap B' = \emptyset$ نتیجه می شود $A \subset B$ پس $A \cap B = A$

۷۷- نقطه $M(2,3)$ وسط پاره خطی است که دو نقطه $A(2,m)$ و $B(n,-1)$ را به هم وصل میکند، $m+n$ کدام است (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$m = \frac{A+B}{2} \Rightarrow (2.3) = \frac{(2+n \cdot m - 1)}{2} \Rightarrow (4.6) = (2 + n \cdot m - 1) \Rightarrow n = 2 \cdot m = 7$$

$$\Rightarrow m + n = 9$$

۷۸- شیب خط گذرنده از دو نقطه متمایز $A(2a, 3a)$ و $B(-2a+4, 5-2a)$ کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$m = \frac{5-2a-3a}{-2a+4-2a} = \frac{5-3a}{4-4a} \xrightarrow{a=0} m = \frac{5}{4}$$

۷۹- به ازای چه مقادیری از m ، دو خط $y+mx=3$ و $my-x=1$ عمود بر هم می‌باشند؟ (بانک سپه سال ۹۳)

- (۱) R (۲) $R-\{0\}$ (۳) 2 (۴) هیچ مقدار

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y + mx = 3 \Rightarrow y = -mx + 3$$

$$my - x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{m}x + \frac{1}{m}$$

$$\text{باید } -m \frac{1}{x} = -1 \text{ پس } -1 = -1$$

لذا به ازای همه ی مقادیر m این دو خط بر هم عمودند.

۸۰- مماس بر منحنی $y = \ln(x^2 - 1)$ در نقطه $x = \sqrt{2}$ ، خط $x=0$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) $(0, \sqrt{2})$ (۲) $(0, -\sqrt{2})$ (۳) $(0, -2\sqrt{2})$ (۴) $(0, -4)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$y = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow y'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = .$$

معادله خط مماس عبارت است از:

$$y = 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \xrightarrow{x=0} y = 4$$

۸۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x-4}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

- (۱) $\frac{-1}{16}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) 4 (۴) -4

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-1}{x^2}}{1} = \frac{-1}{16}$$

۸۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{(x^2-9)}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{5}{36}$ (۴) $\frac{5}{36}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{(x^2-9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}} - 1}{2x} = \frac{\frac{1}{6} - 1}{6} = \frac{-\frac{5}{6}}{6} = -\frac{5}{36}$$

۸۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{4}x^2}{3(x-1)}$ کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

- (۱) $\frac{\pi^2}{24}$ (۲) $-\frac{\pi}{24}$ (۳) $\frac{\pi^2}{6}$ (۴) $-\frac{\pi}{6}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{4}x^2}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{8} \cos(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}x}{3} = \frac{-\pi}{6}$$

۸۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & x \geq 2 \\ cx+5 & x < 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار C، در نقطه $x=2$ پیوسته می باشد؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 8 (۴) 9

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$f(2) = 3x^2 + 7 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 13, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2c + 5$$

$$2c + 5 = 13 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

۸۵- کدام شاخص آماری، با تغییر واحد اندازه گیری داده های آماری تغییر نمی کند؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

- (۱) واریانس (۲) میانه (۳) میانگین (۴) ضریب تغییرات

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

۸۶- اگر دو عدد و مربع آنها با هم جمع شوند برابر ۴۲ می شود. اگر حاصلضرب این دو عدد برابر ۱۵ بشود، جمع این دو عدد کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

- (۱) -۱۶ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۱۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$a^2 + b^2 + a + b = 42 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 2ab + a + b = 42$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 30 + a + b = 42$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 + (a + b) = 72$$

$$\Rightarrow (a + b)(a + b + 1) = 72$$

$$\Rightarrow \{a + b = 8$$

۸۷- اگر A شرط لازم برای B باشد، کدامیک از جملات زیر صحیح نیست؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) B شرط کافی برای A است.

(۲) اگر A باشد، آنگاه B نیز هست.

(۳) اگر A نباشد، آنگاه B هم نیست.

(۴) A وجود ندارد مگر آنکه B وجود داشته باشد.

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۸۸- واریانس داده های ۵ و ۴ و ۴ و ۳ کدام است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) ۰,۲۵ (۲) ۰,۷۵ (۳) ۰,۵ (۴) ۱,۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\mu = \frac{3+4+4+5}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(4-3)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-5)^2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۸۹- کدام یک از موارد زیر از خواص توزیع نرمال است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) صفر = میانگین و ۱ = انحراف معیار

(۲) ۱ = میانگین و صفر = انحراف معیار

(۳) صفر = میانگین و ۱ = میانه و نما

(۴) میانه با میانگین منطبق است.

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

۹۰- در کدام حالت ضریب همبستگی (R) مستقیم و کامل است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) R=0 (۲) R=-1<+1 (۳) R=-1 (۴) R=+1

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

وقتی R = +1 باشد همبستگی و کامل است.

۹۱- وقتی که یک متغیر تصادفی مانند (X) بر طبق قانون توزیع نرمال با واریانس نامعلوم باشد، برای آزمون آن کدام یک از توابع آزمون کننده زیر مناسب است؟ (بانک ملت سال ۹۴)

(۱) F فیشر (۲) t استیودنت (۳) Z و t استیودنت (۴) X² پیرسون

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

بستگی به حجم نمونه دارد اگر $n \geq 30$ باشد از توزیع z و اگر $n < 30$ باشد از توزیع t

۹۲- از ترکیب رقم های ۳ و ۵ و ۹ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که در هیچکدام از آنها رقم تکراری وجود نداشته باشد؟ (استانداردی ها سال ۹۱)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۶ حالت که به صورت زیر هستند.

359 539 935

359 593 953

۹۳- ویژگی مشترک بین افراد جامعه را می نامند. (استانداردی ها سال ۹۱)

(۱) صفت مشخصه (۲) صفت متغیر

(۳) حجم جامعه (۴) داده آماری

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۹۴- به چند طریق می توان از بین ۵ شهر استان A و ۶ شهر استان B، ۳ شهر را برای راه اندازی شعبه جدید انتخاب کرد. به طوری که حداقل یک شهر استان A انتخاب شود؟ (بانک سپه سال ۹۳)

(۱) ۱۵۵ (۲) ۱۴۵ (۳) ۱۳۵ (۴) ۷۵

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\binom{5}{1}\binom{6}{2} + \binom{5}{2}\binom{6}{1} + \binom{5}{3} = 5 \times 15 + 10 \times 6 + 10 = 145$$

۹۵- بانکی در یک شهر، دارای ۵ دستگاه خودپرداز ATM است. اگر احتمال این که هر دستگاه در ماه نیاز به تعمیر داشته باشد برابر با 0.2 باشد، احتمال این که در ماه، تعداد زوجی از دستگاه های ATM نیاز به تعمیر نداشته باشد کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

(۱) $(0.8)^3 (0.81)$ (۲) $(0.8)^4 (0.81)$

(۳) $(0.8)^4 (0.9)$ (۴) $(0.8)^3 (0.9)$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

باید تعداد دستگاه هایی که در هر ماه به تعداد فرد نیاز به تغییر دارند محاسبه کنیم.

$$\binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4 + \binom{5}{3}(0.2)^3(0.8)^2 + \binom{5}{5}(0.2)^5 = (0.9)(0.8)^4$$

۹۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $p(A|B') = \alpha$, $p(B|A) = \beta$ باشند کدام مورد صحیح است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

$$(۱) \quad p(A) = \alpha, p(B) = 1 - \beta \quad (۲) \quad p(A) = 1 - \alpha, p(B) = \beta$$

$$(۳) \quad p(B) = \alpha, p(A) = 1 - \beta \quad (۴) \quad p(B) = 1 - \alpha, p(A) = \beta$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \alpha$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \beta$$

در نتیجه داریم:

$$P(A \cap B') = \alpha P(B') = \alpha (1 - P(B))$$

$$\frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{\alpha (1 - P(B))}{P(A)} = \beta \Rightarrow \frac{1 - P(B)}{P(A)} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow P(A) = 2 \text{ و } P(B) = 1 - \beta$$

۹۷- تخلفات اداری شعبه ای از یک بانک، توسط بازرسان با احتمال ۰/۱ تایید می‌شود. احتمال اینکه ششمین شعبه ای که تخلفات آن توسط بازرسان بررسی شده سومین شعبه ای باشد که تخلفات آن شعبه توسط بازرسان تایید شده باشد کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

$$(۱) \quad 0/00081 \quad (۲) \quad 0/00162 \quad (۳) \quad 0/00729 \quad (۴) \quad 0/01158$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\binom{5}{2} (0.1)^3 (0.9)^3 = 10 \times 0.001 \times 0.729 = 0.00729$$

۹۸- اگر میانگین اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰/۵ باشد، آنگاه میانگین اعداد زوج از ۲ تا ۲۰۰ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$(۱) \quad ۵۰/۵ \quad (۲) \quad ۱۰۰ \quad (۳) \quad ۱۰۱ \quad (۴) \quad ۱۵۰/۵$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

اگر همه اعداد در یک عدد ثابت ضرب شوند آنگاه میانگین نیز در همان عدد ثابت ضرب می‌شود بنابراین در این مسأله میانگین دو برابر می‌شود.

۹۹- واریانس مقادیر ۴ و ۳ و ۰ و ۳- و ۴- کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$(۱) \quad ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۰ \quad (۳) \quad ۸ \quad (۴) \quad \text{صفر}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$N = \frac{-4-3+0+3+4}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(X_i - N)^2}{N} = \frac{(-4 - 0)^2 + (-3 - 0)^2 + 0^2 + (3 - 0)^2 + (4 - 0)^2}{5} = \frac{32 + 18}{5} = 10$$

۱۰۰- انحراف معیار مقادیر ۱۶ و x_1 و x_2 و و x_n برابر صفر است. میانگین مقادیر x_1 و x_2 و و x_n کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

(۱) $\frac{16}{n}$ (۲) $\frac{16}{n+1}$ (۳) صفر (۴) ۱۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۰۱- میانگین ۱۸ داده آماری ۱۵.۵ و میانگین ۱۳ داده دیگر ۱۷.۲۵ می باشد. میانگین این ۳۰ داده کدام است؟ (استاندارداری ها سال ۹۱)

(۱) ۱۶.۱ (۲) ۱۶.۲ (۳) ۱۶.۲۵ (۴) ۱۶.۴

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\mu = \frac{18 \times 15/5 + 12 \times 17/25}{30} = \frac{279 + 207}{30} = \frac{486}{30} = 16/2$$

۱۰۲- مجموعه ای از افراد یا اشیا که درباره ی آنها می خواهیم موضوع و یا موضوعاتی را مطالعه کنیم، چه می گویند؟ (استاندارداری ها سال ۹۱)

(۱) جامعه آماری (۲) نمونه آماری

(۳) زیر نمونه آماری (۴) زیر مجموعه آماری

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۰۳- اگر $a = 4^{x+1}$ و $b = 4^x$ چه رابطه ای بین a و b برقرار است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

$a = 2b$ (۱) $b = 4a$ (۲)

$a = 14b$ (۳) $a = 4b$ (۴)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{aligned} a &= 4^{x+1} \\ \Rightarrow a &= 4^x \times 4 \\ b &= 4^x \\ \Rightarrow a &= 4b \end{aligned}$$

۱۰۴- هشت درصد از سه ربع کدام کسر زیر برابر با $\frac{3}{8}$ است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

(۱) $\frac{25}{4}$ (۲) $\frac{4}{25}$

(۳) $\frac{25}{2}$ (۴) $\frac{2}{25}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\frac{8}{100} \times \frac{3}{4} x = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{24}{400}} = \frac{3 \times 400}{8 \times 24} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}$$

۱۰۵- اگر ضریب تغییرات و میانگین حسابی یک توزیع به ترتیب ۲۲ درصد و ۳ باشد انحراف معیار کدام است؟ (بانک گردشگری سال ۹۶)

۰/۶۶ (۲)

۰/۰۰۶۶ (۱)

۶۶ (۴)

۶/۶ (۳)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$C_v = 22\% = 0.22$$

$$\mu = 3\% = 0.03$$

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} \Rightarrow 0.22 = \frac{\sigma}{0.03} \Rightarrow \sigma = 0.0066$$

۱۰۶- چه نوع صفاتی در آمار فقط با استفاده از مجموع اعداد صحیح بیان می‌شوند؟ (استانداری ها سال ۹۱)

(۲) متغیر کمی پیوسته

(۱) متغیر کیفی

(۴) متغیر کمی نا پیوسته

(۳) صفت مشخصه

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

۱۰۷- در توزیع فراوانی زیر، میانگین برابر است با: (استانداری ها سال ۹۱)

X	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600
F	۱۵	۱۸	۳۰	۲۰	۱۷

۳۹۵,۴ (۴)

۳۹۴,۵ (۳)

۳۶۵,۷۶ (۲)

۳۵۶,۶۷ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu = \frac{(150 \times 15) + (250 \times 18) + (350 \times 30) + (450 \times 20) + (550 \times 17)}{15 + 18 + 20 + 30 + 17}$$

$$= \frac{2250 + 4500 + 10500 + 9000 + 9350}{90} = \frac{35600}{90} = 395/4$$

۱۰۸- واریانس داده های آماری صفر است، کدام نتیجه گیری در این مورد صحیح است؟ (استانداری ها سال ۹۱)

(۲) تمام داده ها برابرند.

(۱) میانگین داده صفر است.

(۴) میانگین بیشتر از میانه است.

(۳) داده ها متقارن اند.

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۱۰۹ - نرخ رشد میزان سرمایه گذاری مشتریان یک بانک در حسابهای پس انداز در ۵ سال متوالی به ترتیب برابر با ۸، ۲۵، ۱۰، ۵ و ۱۰ درصد است. میانگین نرخ رشد سرمایه گذاری در طی این ۵ سال کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۰٫۶ (۳) ۱۱ (۴) ۱۱٫۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\mu = \frac{50 + 10 + 25 + 8 + 10}{5} = \frac{58}{5} = 11/6$$

۱۱۰ - جدول زیر نشان دهنده تعداد سال های خدمت ۲۵۰ نفر از کارکنان یک بانک است. اگر ۷۶ درصد از کارکنان این بانک حداکثر ۱۹ سال سابقه خدمت داشته باشند مقدار b کدام است؟ (بانک سپه سال ۹۳)

i	1	2	3	4	5	6
Ei-Ui	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
fi	30	50	60	a	b	20

- (۱) ۹۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۰ (۴) ۱۰

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$25 \times \frac{76}{100} = 190 \Rightarrow 30 + 50 + 60 + a = 190 \Rightarrow a = 50$$

$$30 + 50 + 60 + a + b + 20 = 250 \xRightarrow{a=50} 210 + b = 250 \Rightarrow b = 40$$

۱۱۱ - فرض کنید $p(A) = 0.2$ ، $n(A) = 8$ و $n(B) = 5$ باشد، در این صورت مقدار $P(B)$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{1}{13}$ (۴) $\frac{5}{13}$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{n(S)} = \frac{2}{10} \Rightarrow n(S) = 40$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

۱۱۲ - در یک اداره ۲۰ زن و ۳۰ مرد کار می کنند که ۵ زن و ۲۰ مرد، لیسانس و بقیه دیپلم دارند. احتمالی این که کارمندی از این اداره، مرد با دارای لیسانس باشد، کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

- (۱) ۰٫۴ (۲) ۰٫۵ (۳) ۰٫۶ (۴) ۰٫۷

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

دیپلم	۱۰	۱۵	۲۵
لیسانس	۲۰	۵	۲۵
	۳۰	۲۰	۵۰
	مرد	زن	

$$P(\text{لیسانس و مرد}) = P(\text{مرد})p(\text{لیسانس}|\text{مرد}) = \frac{30}{50} \times \frac{20}{30} = \frac{2}{5}$$

۱۱۳- جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. از هر جعبه مهره ای خارج می کنیم. احتمال این که هر دو مهره از یک رنگ نباشند کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۲)

$$\frac{6}{25} \text{ (۱)} \quad \frac{12}{25} \text{ (۲)} \quad \frac{8}{25} \text{ (۳)} \quad \frac{13}{25} \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$P(\text{جعبه B سفید, جعبه A سیاه}) + P(\text{جعبه B سیاه, جعبه A سفید})$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{12}{50} + \frac{12}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

۱۱۴- فرض کنید میانگین ۱۰ داده، برابر ۴ و میانگین ۵ داده دیگر برابر a است. اگر میانگین کل ۱۵ داده برابر ۱۰ باشد مقدار a کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$۱۲ \text{ (۱)} \quad ۱۶ \text{ (۲)} \quad ۱۸ \text{ (۳)} \quad ۲۲ \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{4 \times 10 + 5 \times a}{15} = 10 \rightarrow \frac{40 + 5a}{15} = 10 \rightarrow 40 + 5a = 150 \rightarrow 5a = 110 \rightarrow a = 22$$

۱۱۵- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند مجموعه $A - (A \cap B)$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

$$A \cap B \text{ (۱)} \quad A \cap B' \text{ (۲)} \quad B \cap A' \text{ (۳)} \quad (A \cup B)' \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$A - A \cap B = A \cap (A \cap B)' \rightarrow A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup (A \cap B') = A \cap B'$$

۱۱۶- مجموع اعداد طبیعی فرد برابر است با: (بانک ملت سال ۹۴)

$$n^2 \text{ (۱)} \quad n^2 + n \text{ (۲)} \quad n^2 + 1 \text{ (۳)} \quad 3n^2 \text{ (۴)}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد. مجموعه اعداد طبیعی فرد از ۱ تا ۸ برابر با n^2 است. مشکل زیر اثبات هندسی این موضوع است.

$$\begin{array}{r}
 7 \leftarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 5 \leftarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 3 \leftarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 1 \leftarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{array}$$

$$\rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

۱۱۷- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۱)

$$\frac{7(\sqrt{3}-7)}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3\sqrt{3}-7}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \quad (۲)$$

$$3(\sqrt{3}-1) \quad (۱)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد. مخرج مشترک در عبارت کسری به صورت زیر حساب می شود.

$$(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-(2+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{1-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{7-3\sqrt{3}}{1-3} = \\
 \frac{7-3\sqrt{3}}{-2} &= \frac{-(7-3\sqrt{3})}{2} = \frac{3\sqrt{3}-7}{2}
 \end{aligned}$$

۱۱۸- تعداد اعداد دو رقمی قابل قسمت بر ۴ کدام جاست؟ (بانک ملت سال ۹۴)

$$۱۸ \quad (۴)$$

$$۲۶ \quad (۳)$$

$$۲۴ \quad (۲)$$

$$۲۲ \quad (۱)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

اولین عدد دورقمی قابل قسمت بر ۴ عدد ۱۲ و آخرینشان ۹۶ است. این اعداد تشکیل یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت ۴ می دهند. پس:

$$12+4(n-1)=96 \rightarrow 12+4n-4=96 \rightarrow 88 \rightarrow n=22$$

۱۱۹- مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصلضرب ارقام این عدد کدام است؟ (استانداری ها سال ۹۱)

$$۳۶ \quad (۴)$$

$$۳۵ \quad (۳)$$

$$۳۲ \quad (۲)$$

$$۲۷ \quad (۱)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=4 \end{cases} \rightarrow 2a=16 \rightarrow a=8, b=4$$

بنابراین عدد دورقمی مورد نظر یا ۴۸ یا ۸۴ است. که در هر دو حالت حاصلضرب ارقام آن برابر با ۳۲ است.

۱۲۰- علامت مناسب در جای خالی زیر، کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$\{X: X \in \mathbb{Z}, X \geq 11\} \dots \{12, 13, 14\}$$

$$\supset \quad (۴)$$

$$\subseteq \quad (۳)$$

$$\in \quad (۲)$$

$$= \quad (۱)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$\{x: x \in \mathbb{Z}, x \geq 11\} = \{11, 12, 13, \dots\}$$

$$\{12, 13, 14, \dots\} \supset \{11, 12, 13\} \text{ یا به عبارت دیگر } \{12, 13, 14\} \in \{11, 12, 13, \dots\} \text{ بدیهی است که}$$

۱۲۱- اگر مجموعه مرجع اعداد طبیعی باشد، مجموعه $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$ به صورت توصیفی کدام است؟ (شهرداری ها سال ۹۰)

$$\{x: x = 2n+1, 1 < n < 7\} \quad (۱) \quad \{x: x = 2n-1, 1 \leq n \leq 7\} \quad (۲)$$

$$\{x: x = 2n, 1 < n < 7\} \quad (۳) \quad \{x: x = 2n-1, 1 \leq n \leq 7\} \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} = \{x: x \in \mathbb{N}, x = 2n, 1 \leq n \leq 7\}$$

در بین گزینه ها هیچ کدام پاسخ صحیح نیستند ولی گزینه ۳ نزدیکترین حالت ممکن به پاسخ صحیح است.

۱۲۲- اگر $A = x - \frac{2}{x+1}$ و $B = 1 - \frac{1}{x+2}$ باشد. حاصل A. B کدام است؟ (استانداری ها سال ۹۱)

$$x \quad (۱) \quad x-2 \quad (۲) \quad x+3 \quad (۳) \quad x-1 \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح است.

$$A \times B = \left(x - \frac{2}{x+1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{x(x+1)-2}{x+1} \times \frac{x+2-1}{x+2} = \frac{x^2+x-2}{x+1} \times \frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2+x-2}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = x-1$$

۱۲۳- اگر $5x = 3t$ و $8y = 2t$ باشد نسبت $\frac{y}{x}$ چه خواهد بود؟ (بانک ملت سال ۹۴)

$$\frac{20}{3} \quad (۱) \quad \frac{3}{20} \quad (۲) \quad \frac{5}{12} \quad (۳) \quad \frac{12}{5} \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x = 3t \rightarrow x = \frac{3}{5}t \\ 8y = 2t \rightarrow y = \frac{2}{8}t = \frac{1}{4}t \end{array} \right\} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{4}t}{\frac{3}{5}t} = \frac{5}{12}$$

۱۲۴- شخصی کالایی را با ۲۰ درصد تخفیف خرید و با ۲۰ درصد سود به مبلغ ۱۹۲۰ ریال فروخت، قیمت اصلی کالا چقدر بوده است؟ (استانداری ها سال ۹۱)

$$۱۹۸۰ \quad (۱) \quad ۲۰۰۰ \quad (۲) \quad ۱۹۲۰ \quad (۳) \quad ۱۹۶۰ \quad (۴)$$

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

فرض کنیم قیمت اصلی کالا برابر x ریال بوده است. بنابر این آن شخص کالا را با قیمت $\frac{80}{100}x$ خریداری کرده است. سپس با سود $\frac{20}{100}$ از $\frac{80}{100}x$ کالا را به قیمت ۱۹۲۰ تومان فروخته است. یعنی:

$$\frac{80}{100}x + \frac{20}{100}\left(\frac{80}{100}x\right) = 1920 \rightarrow \frac{80}{100}x\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1920$$

$$\rightarrow \frac{80}{100}x\left(\frac{120}{100}\right) = 1920$$

$$\rightarrow \frac{80}{100}x = 1920 \times \frac{100}{120} = 1600$$

$$\rightarrow x = 1600 \times \frac{100}{80} = 2000$$

۱۲۵- اگر تابع $f(x) = \sqrt{2x} - 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ باشد، مقدار $(g \circ f)$ به مقدار $x=2$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x} - 1) = (\sqrt{2x} - 1)^2 + 1 = 2$$

۱۲۶- نصف عدد 2^{20} چند است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۴) 2^{19} (۳) 2^{10}

(۲) ۱۰۲۴۰

(۱) ۱۰۲۴

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{2^{20}}{2} = \frac{2^{20}}{2^1} = 2^{20-1} = 2^{19}$$

۱۲۷- مجموع ده جمله اول تصاعد هندسی $\{3, 6, 12, \dots\}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۴) ۹۶۳۰

(۳) ۶۹۳۰

(۲) ۳۰۶۹

(۱) ۳۰۹۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$S_n = \frac{t1 - t1q^n}{1 - q} = \frac{3 - 3 * 2^{10}}{1 - 2} = 3069$$

۱۲۸- جوابهای معادله $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۴) $y=2, x=3$ (۳) $y=-2, x=-3$ (۲) $y=3, x=2$ (۱) $y=2, x=-3$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x + 8y = 76 \\ -20x - 15y = -90 \end{cases} \rightarrow -7y = -14 \rightarrow y=2, x=3$$

۱۲۹- جوابهای معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 6 = 0$ کدامند؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

$$(1) \quad x_2 = 2 \text{ و } x_1 = 1 \quad (2) \quad x_2 = 2 \text{ و } x_1 = 3$$

$$(3) \quad x_2 = 4 \text{ و } x_1 = 2 \quad (4) \quad x_2 = 4 \text{ و } x_1 = 3$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x=2, x=3$$

۱۳۰- اگر به مجموعه A چهار عضو اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه آن چند برابر می شود؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 16 \quad (4) \quad 32$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\text{پس } 16 \text{ برابر می شود. } 2^n = 2^{n+4} = 2^n * 2^4 = 16 * 2^n = \text{مجموعه زیر تعداد}$$

۱۳۱- در صورتی که متغیر پیوسته و یا تعداد مشاهدات زیاد باشد، استفاده از کدام نمودار بهتر است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

$$(1) \quad \text{هیستوگرام} \quad (2) \quad \text{ستونی}$$

$$(3) \quad \text{میلۀ ای} \quad (4) \quad \text{دایره ای}$$

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

بنابر اصول آماری به علت داده های بسیار زیاد که پیوسته هستند نمودار دایره ای بهتر است.

۱۳۲- انحراف معیار داده های جدول مقابل چقدر است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

Xi	2	4	6	8
Fi	1	2	3	4
	۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (xi - \bar{x})^2} = 2$$

۱۳۳- میانگین ۳۰ داده آماری برابر ۱۵ و انحراف معیار آنها برای ۵/۱ است، درصد ضریب تغییرات آنها چقدر است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۸۹)

(۱) ۲۰

(۲) ۱۵

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۴ صحیح می باشد.

ضرب تغییرات برابر می شود با $\frac{5}{1}$ تقسیم بر ۱۵ که برابر ۱۰ می شود.

۱۳۴- به چند طریق میتوان از اعداد صفر تا ۹ شماره تلفن ۸ رقمی ساخت؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۱) 10^8 (۲) 10×9^9 (۳) 9×10^7 (۴) 9×10^{10}

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۳ صحیح می باشد.

با استفاده از اصل شمارش از صفر تا ۹ ما ۱۰ رقم داریم و بایستی رقم اول از سمت چپ صفر نشود. پس در نتیجه گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۳۵- میانگین متغیر تصادفی $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ برابر ۳ است. میانگین متغیر تصادفی $2X_1+3, 2X_2+3, \dots, 2X_n+3$ برابر چند است (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۱) ۱۵

(۲) ۹

(۳) ۶

(۴) ۳

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 3 \rightarrow \frac{(2x_1 + 3) + \dots + (2x_n + 3)}{n} = \frac{2(x_1 + \dots + x_n) + 3n}{n} = 2 * 3 + 3 = 9$$

۱۳۶- در نمودار روبه رو، اختلاف میانه و مد داده ها کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - فراگیر سوم سال ۹۵)



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

- پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد. با توجه به نمودار، بیشترین فراوانی را نگاه می کنیم لذا مد ۴ است. از مرتب کردن داده ها میانه هم ۴ می شود زیرا:

$$1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 7$$

4=میانه

تفاضل مد و میانه = صفر

۱۳۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = 0.4$ باشد و $P(A \cap B) = 0.2$ باشد، احتمال این که یکی از این دو پیشامد A و B رخ دهد چقدر است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۱) ۰,۶

(۲) ۰,۷

(۳) ۰,۸

(۴) ۰,۹

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۲ صحیح می باشد.

چون A و B مستقل هستند، پس:

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B) \rightarrow 0.2 = 0.4 * p(B) \rightarrow p(B) = 0.5$$

بنابراین:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7$$

۱۳۸- از بین ۱۰ تعمیر کار منزل فقط ۳ نفر از آنان قادر به تعمیر لباس شویی هستند. اگر ۲ نفر از آنان را به طور کامل تصادفی انتخاب کنیم احتمال آن که هر دو نفر قادر به تعمیر لباس شویی باشند چقدر است؟ (آموزش و پرورش سال ۸۹)

(۱) ۰,۰۶

(۲) ۰,۱۵

(۳) ۰,۳

(۴) ۰,۴۶

• پاسخ تیم آموزشی E-Estekhdam.com: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = 0.06$$



بخش سوم: نکات آموزشی مربوط به سرفصل ریاضیات و آمار مقدماتی



نکات آموزشی ریاضیات

مجموعه‌ها

نکته شماره ۱

مجموعه عبارت است از هر دسته‌ای از اشیاء به نام عضو که مشخص و متمایز باشند.

زیر مجموعه

هرگاه تمامی اعضا A عضو B باشند، می‌نویسیم $A \subset B$ و می‌خوانیم A زیر مجموعه B است.

1. $\emptyset \subset A$ 2. $A \subset A$ 3. $A \subset B$, $B \subset A \Rightarrow A=B$ 4. $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

نکته: اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n خواهد بود.

قوانین مجموعه‌ها

قانون	اجتماع (U)	اشتراک (\cap)
عضو بی اثر	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap M = A$
همانی	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
متمم‌ها	$A \cup A' = M$	$A \cap A' = \emptyset$
جابجایی	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
شرکت پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
پخش	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
جذب	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
شبه جذب	$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$	$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

توان

نکته شماره ۲

$$(a^m)^n = a^{nm} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \cdot (ab)^n = a^n b^n \cdot \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \cdot a^n a^m = a^{n+m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot a^1 = a \cdot a^0 = 1 \cdot a \neq 0$$

تذکره ۱: هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد: $a^1 = a$

تذکره ۲: هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد برابر است با عدد یک: $a^0 = 1$

رادیکال‌ها

نکته شماره ۳

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}} \cdot b \neq 0 \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \cdot b \neq 0 \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \cdot (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \cdot (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n} \cdot \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تذکره ۱: اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد
تذکره ۲: اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد.

رادیکال‌های مرکب:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} : c^2 = a^2 - b \cdot c > 0$$

چند جمله‌ای

نکته شماره ۴

یک جمله‌ای بر حسب یک متغیر مانند x ، به صورت ax^n ; $a \in \mathbb{R} \cdot n \in \mathbb{Z}^+$ تعریف می‌شود. مجموع چند یک جمله‌ای غیر متشابه را، چند جمله‌ای می‌گوییم.

عبارت گویا

نکته شماره ۵

$$\begin{aligned} \frac{P_x}{Q_x} \pm \frac{S_x}{R_x} &= \frac{P_x \pm S_x}{Q_x} & (Q_x \neq 0) \\ \frac{P_x}{Q_x} \pm \frac{S_x}{R_x} &= \frac{P_x \cdot R_x \pm Q_x \cdot S_x}{Q_x \cdot R_x} & (Q_x \cdot R_x \neq 0) \\ \frac{P_x}{Q_x} \times \frac{S_x}{R_x} &= \frac{P_x \cdot S_x}{Q_x \cdot R_x} & (Q_x \cdot R_x \neq 0) \\ \frac{P_x}{Q_x} \div \frac{S_x}{R_x} &= \frac{P_x}{Q_x} \times \frac{R_x}{S_x} = \frac{P_x \cdot R_x}{Q_x \cdot S_x} & (Q_x \cdot S_x \neq 0) \end{aligned}$$

گویا کردن مخرج‌ها:

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

معادله و نامعادله

نکته شماره ۶

$$ax \pm b = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{b}{a}$$

اگر $a \neq 0$ باشد، معادله یک جواب دارد اگر $a = 0$ و $b = 0$ ، معادله مبهم است و بی‌شمار جواب دارد و اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ معادله غیر ممکن (ممتنع) است و جواب ندارد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \cdot \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد.

۲. اگر $\Delta < 0$

۳. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه (ریشه مضاعف) دارد.

تعیین علامت $A = ax + b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است و مشخص است که علامت عبارت $A = ax + b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax + b = 0$ موافق علامت ضریب x است و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

x	$-\frac{b}{a}$
$AX+B$	<div>مخالف علامت a</div> <div>موافق علامت a</div>

نکته ۱: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارات درجه اول باشد هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می کنیم.

نکته ۲: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف صرف نظر می کنیم و بقیه را تعیین علامت می کنیم.

نکته ۳: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

نکته ۴: اگر در معادله درجه دوم $a + b + c = 0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\frac{c}{a})$ است.

نکته ۵: اگر در معادله درجه دوم $a + c = b$ باشد آنگاه یک ریشه معادله (-1) و ریشه دیگر $(\frac{c}{a} -)$ است.

نکته ۶: اگر ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta = a^2$ خواهد بود

نکته ۷: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(K+1)^2}{K}$$

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۸: معادله درجه دومی که هر ریشه اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است.

نکته ۹: معادله درجه دومی که هر ریشه اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است.

نکته ۱۰: معادله درجه دومی که هر ریشه اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 + bnx + cn^2 = 0$ است.

نکته ۱۱: معادله درجه دومی که هر ریشه اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ است.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است:

اگر x' و x'' دو ریشه معادله درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S = x' + x''$ و $P = x' \cdot x''$ معادله درجه دومی که ریشه هایش x' و x'' می باشند به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ بیان می شود.

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} S = x' + x'' = -\frac{b}{a} \rightarrow \text{حاصلجمع دو ریشه} \\ P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \rightarrow \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \text{قدرمطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} \begin{cases} x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P \\ x'^3 + x''^3 = S^3 - 3SP \\ \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \\ |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \end{cases}$$

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \geq 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

تصادد عددی و هندسی

نکته شماره ۷

تصادد عددی

a_n : جمله‌ی n ام a_1 : جمله‌ی اول d : قدر نسبت

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

b را واسطه حسابی یا میانگین حسابی سه عددی a, b, c نامیم، اگر داشته باشیم:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

در هر تصاعد عددی داریم:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)d \\ a_m = a_1 + (m - 1)d \end{cases} \Rightarrow a_n - a_m = (n - m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

اگر بین دو عدد معلوم a, b ، تعداد n واسطه‌ی حسابی درج کنیم، قدرنسبت از رابطه‌ی $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می‌آید.

مجموع n جمله‌ای اول تصاعد عددی:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d], S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

تصادد هندسی:

عدد ثابت $t_1 \neq 0$ و عدد ثابت $q (\neq 0, \pm 1)$ را در نظر بگیرید، دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن t_1 و جمله‌های بعدی آن از ضرب q در جمله ماقبل بدست آید، چنین دنباله‌ای را یک تصاعد هندسی می‌نامیم.

جمله n ام یک تصاعد هندسی از رابطه $t_n = t_1 q^{n-1}$ محاسبه می‌شود.

نکته ۱: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار c و b و a سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند آن است که $b^2 = ac$ باشد.

نکته ۲: مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی:

$$S_n = t_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

نکته ۳: رابطه بین جمله n ام و m ام یک تصاعد هندسی:

۱. اگر $n-m$ زوج باشد آنگاه $q = \pm \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد.

۲. اگر $n-m$ فرد باشد آنگاه $q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد.

مجموع n جمله اول تصاعد هندسی:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, S_n = \frac{q \cdot a_n - a_1}{q - 1}$$

لگاریتم

نکته شماره ۸

اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد و $a \neq 1$ ، و اگر x عددی مثبت و y عددی حقیقی باشد به طوری که $a^y = x$ را لگاریتم در مبنای a می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$y = \log_a x$$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log AB = \log A + \log B, \log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log A^n = n \log A, \log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A, \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log c^a}{\log c^b}, a^{\log a^N} = N \cdot a^{\log c^b} = b^{\log c^a}$$

اتحادها

نکته شماره ۹

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n; \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اگر n فرد باشد:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

اگر n زوج باشد:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

اگر n زوج باشد:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1})$$

مختصات خط و نقطه، بردار و ماتریس

نکته شماره ۱۰

اندازه‌ی جبری پاره‌خطی مانند AB را نماد \overline{AB} نمایش داده می‌شود و داریم:

$$\overline{AB} = X_A - X_B$$

مختصات وسط یک پاره خط:

$$A(X_A, Y_A) \cdot B(X_B, Y_B) \Rightarrow X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \cdot Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

اندازه طول یک پاره خط:

$$A(X_A, Y_A) \cdot B(X_B, Y_B) \Rightarrow AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

فرم‌های کلی معادله‌ی یک خط:

$$Ax + by + c = 0, y = mx + h$$

اوضاع نسبی دو خط $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ در صفحه:

$$aa' + bb' = 0 \text{ (دو خط عمود برهم)}$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \text{ (دو خط متقاطع)}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, c \neq c' \text{ (دو خط منطبق بر هم)}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ (دو خط موازی)}$$

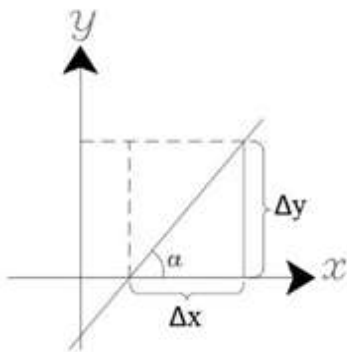
معادله خط گذرنده از نقاط $A(X_A, Y_A)$ و $B(X_B, Y_B)$:

$$\frac{Y - Y_A}{X - X_A} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

نکته: شیب خطی که از دو نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} X_A \\ Y_A \end{smallmatrix} \right.$ و $B \left| \begin{smallmatrix} X_B \\ Y_B \end{smallmatrix} \right.$ می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

نکته ۳۴: شیب یک خط همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور X ها می‌سازد یا بعبارت دیگر می‌توان شیب را نسبت تغییرات Y به تغییرات X بیان کرد.



www.e-estekhdam.com

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اگر بردارهای $\vec{U} = (X_1, Y_1, Z_1)$ و $\vec{V} = (X_2, Y_2, Z_2)$ دو بردار مفروض باشند، داریم:

ضرب اسکالر یا نقطه ای دو بردار:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cos \theta = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

ضرب خارجی دو بردار:

$$\vec{U} \times \vec{V} = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot |\vec{U} \times \vec{V}| = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \sin \theta$$

نکته: معادله خطی که از دو نقطه $A \left(\begin{smallmatrix} X_A \\ Y_A \end{smallmatrix} \right)$ و $B \left(\begin{smallmatrix} X_B \\ Y_B \end{smallmatrix} \right)$ می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

نکته: برای آنکه دو خط موازی باشند، باید شیبهای آن دو خط با هم برابر باشند.

نکته: برای آنکه دو خط بر هم عمود باشند، باید حاصل ضرب شیب‌های دو خط برابر (-1) باشد

نکته: برای آنکه دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم منطبق باشند باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد.

نکته: برای تعیین زاویه بین دو خط از فرمول $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{m - m'}{1 + mm'}$ استفاده می‌کنیم.

تذکر: برای تعیین مختصات محل برخورد دو خط کافی است معادله دو خط را در یک دستگاه حل نماییم.

نکته: شرط آنکه سه نقطه $A \left(\begin{smallmatrix} X_A \\ Y_A \end{smallmatrix} \right)$ و $B \left(\begin{smallmatrix} X_B \\ Y_B \end{smallmatrix} \right)$ و $C \left(\begin{smallmatrix} X_C \\ Y_C \end{smallmatrix} \right)$ بر روی یک خط راست واقع باشند آن است که $m_{AB} = m_{AC}$ به عبارت دیگر

$$\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A}$$

نکته: فاصله نقطه $A \left(\begin{smallmatrix} X_A \\ Y_A \end{smallmatrix} \right)$ از خط D به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته شماره ۱۱ تابع

معمولا تابع f از A به B را به صورت زیر و با صورت $Y = f(X)$ نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f = \{(x, y) | y = f(x), x \in A, y \in B\} \end{cases}$$

جبر توابع (اعمال روی توابع)

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; x \in D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

ترکیب توابع

توابع f و g را در نظر بگیرید. ترکیب f و g به صورت زیر می‌باشد:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

تابع زوج و فرد

$$\forall x, -x \in D_f \Rightarrow f(x) = -f(-x) \quad \text{تابع فرد}$$

$$\forall x, -x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(-x) \quad \text{تابع زوج}$$

تابع پوشا: تابع $f(x) = y$ را پوشا می‌گوییم هرگاه به ازای هر y متعلق به برد تابع عضوی مانند x به سمت X_0 میل کند، $f(x)$ نیز به سمت

$$L \text{ میل می‌کند، } L \text{ را حد تابع } f(x) \text{ می‌گوییم و می‌نویسیم: } \lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = L$$

نکته شماره ۱۲ قضایای حد و پیوستگی

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (c \text{ ثابت عدد})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M, M \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \xrightarrow{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \xrightarrow{L \geq 0, n=2k} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

هم ارزی و نکات حد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \cong \pm \sqrt[p]{a} \left(x + \frac{b}{ap}\right) \cdot p = 2k \cdot k = 1.2.3.$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \cong \sqrt[p]{a} \left(x + \frac{b}{ap}\right) \cdot p = 2k + 1 \cdot k = 1.2.3.$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} \cong \sqrt{a} \left|x + \frac{b}{2a}\right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \tan x - x \cong \frac{1}{3} x^3 \cdot \tan x - \sin x \cong \frac{1}{2} x^3 \cdot 1 - \cos^m x \cong \frac{mx^2}{2} \cdot x - \sin x \cong \frac{1}{6} x^3$$

مشتق

نکته شماره ۱۳

$$Y = f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'^+(a) \text{ حد راست:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'^-(a) \text{ حد چپ:}$$

هرگاه تابعی در یک نقطه مانند a دارای مشتق چپ و راست بوده و این دو مشتق باهم برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه a دارای مشتق است.

$$f'^-(a) = f'^+(a) = f'(a)$$

قواعد مشتق گیری

Y (تابع)	Y' (مشتق)	Y (تابع)	Y' (مشتق)
C	.	$m \sin^n u$	$mnu' \sin^{n-1} u \cos u$
mx^n	mnx^{n-1}	$m \cos^n u$	$-mnu' \cos^{n-1} u \sin u$
mu^n	$mnu' u^{n-1}$	$m \operatorname{tg}^n u$	$mnu' \operatorname{tg}^{n-1} u (1 + \operatorname{tg}^2 u)$
$u \cdot v$	$u'v + v'u$	$m \cotg^n u$	$-mnu' \cotg^{n-1} u (1 + \cotg^2 u)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	Arc sinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[m]{u^n}$	$\frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$	Arc cosx	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
me^u	$mu'e^n$	Arc t gx	$\frac{1}{1+x^2}$
me^x	me^x	Arc cotgx	$\frac{-1}{1+x^2}$
$m \operatorname{Ln} u$	$m \left(\frac{u'}{u} \right)$	Arc sin u	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$m \operatorname{Ln} x$	$m \left(\frac{1}{x} \right)$	Arc cos u	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
ma^u	$mu'a^u \operatorname{Ln} a$	Arc tg u	$\frac{u'}{1+u^2}$
$m \log_a u$	$m \left(\frac{u'}{u \operatorname{Ln} a} \right) = m \left(\frac{u'}{u} \right) \log_a e$	Arc cotg u	$\frac{-u'}{1+u^2}$
$\sin x$	$\cos x$	Shu	$u' \operatorname{Chu}$
$\cos x$	$-\sin x$	Chu	$u' \operatorname{Shu}$
$\tan x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x$	Thu	$u' (1 - \operatorname{Th}^2 u)$
$\cot x$	$-(1 + \cotg^2 x)$	Cothu	$u' (1 - \operatorname{Coth}^2 u)$
$\sin u$	$u' \cos u$	ArcShu	$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$\cos u$	$-u' \sin u$	ArcChu	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\tan u$	$u' (1 + \operatorname{tg}^2 u)$	ArcThu	$\frac{u'}{1-u^2}$
$\cot u$	$-u' (1 + \cotg^2 u)$	ArcCothu	$\frac{u'}{1-u^2}$

مشتق تابع ضمنی:

$$f_{(x,y)} = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} \Rightarrow y'_x = -\frac{\text{مشتق جملات نسبت به } x}{\text{مشتق جملات نسبت به } y}$$

مشتق توابع معکوس:

$$y = f_{(x)} \cdot f^{-1}_{(x)} \Rightarrow (f^{-1})'_{(f(a))} = \frac{1}{(f)'_{(a)}}$$

مشتق تابع پارامتری:

$$x = x(t) \cdot u = y(t) \Rightarrow y' = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)}$$

مشتق توابع $u(x)^{v(x)}$:

$$u(x)^{v(x)} \Rightarrow y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{u'v}{u} \right]$$

گرادیان یک تابع:

$$f(x, y, z) \Rightarrow \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

دیورژانس یک تابع برداری:

$$\vec{F} = (P, Q, R) \Rightarrow \text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}$$

کرل یک تابع برداری $(\vec{F} = (P, Q, R))$:

$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta Q}{\delta x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) \vec{k}$$

عملگر لاپلاس:

$$\nabla^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} + \frac{\delta^2 f}{\delta^2 y} + \frac{\delta^2 f}{\delta^2 z}$$

نکته:

$$\text{div}(\text{curl } \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \cdot \text{curl}(\text{grad } \vec{F}) = \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \cdot \text{curl}(\text{curl } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

نکته شماره ۱۴

انتگرال و کاربرد انتگرال

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$$

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c$$

$$x = u(t) \Rightarrow \int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + c, a \neq b$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln x - \frac{1}{n+1} \right] + c$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [b \sin bx + a \cos bx] + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$\int \sin x \cos^n x dx = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر ←

انتگرال گیری به روش جزء به جزء ←

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} x^{n-1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln|cx+d| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + c$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \operatorname{Arc cot} x dx = x \operatorname{Arc cot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و خط های $x=a$ و $x=b$:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

سطح محصور بین دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$:

$$S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

دنباله و سری

نکته شماره ۱۵

سری های متناهی:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 \quad , \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$k + (k+1) + (k+2) + \dots + (k+n-1) = \frac{n(2k+n-1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad , \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

سری های نامتناهی:

به دنباله ای نامتناهی از اعداد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ سری می گویند،

دنباله ای $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ جمع جزئی n ام سری است. اگر حد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ موجود باشد سری

همگراست و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

شرط لازم برای همگرایی سری $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ است یعنی اگر در یک سری حد جمله ای عمومی صفر باشد، ممکن است سری همگرا باشد.

P سری ها:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا و در بازه $0 < p \leq 1$ واگرا می باشد.

سری های متناوب:

در این نوع سری ها، جملات یک در میان مثبت و منفی می شوند و اگر قدر مطلق جملات آن نزولی و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ باشد، سری همگراست.

سرهای توانی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

شعاع همگرای سری فوق از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \cdot R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

معادلات دیفرانسیل

نکته شماره ۱۶

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

معادلات دیفرانسیل خطی:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

جواب عمومی معادله‌ی فوق به صورت زیر است که در آن $u(x) = \exp(\int p(x)dx)$ می‌باشد.

$$Y = \frac{\int u(x)q(x)dx + c}{u(x)}$$

معادلات دیفرانسیل جدا شونده:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$$

جواب عمومی معادله‌ی فوق به صورت $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c$ یا $H(y) = G(x) + C$ می‌باشد.

معادلات دیفرانسیل همگن یا متجانس:

معادله $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ همگن است، اگر تابع $f(x, y)$ همگن باشد، یعنی $f(tx, ty) = f(x, y)$ باشد با تغییر متغیر $z = \frac{y}{x}$ به $(y = zx)z = \frac{y}{x}$ یک معادله جداشونده تبدیل می‌شود.

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(1, z)$$

معادلات دیفرانسیل کامل:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \cdot \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} \Rightarrow \int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy = C$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم:

معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت:

$$y'' + py' + qy = 0$$

معادله‌ی مشخصه‌ی معادله فوق به صورت $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ است. اگر دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشند، جواب عمومی به صورت زیر است که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال گیری هستند.

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

اگر معادله‌ی مشخصه ریشه‌ی مضاعفی به صورت $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ داشته باشد، داریم:

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{p}{2}x}$$

اگر ریشه‌ها، λ_1 و λ_2 اعدادی مختلط به شکل $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ و $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ به طوری $\alpha = -\frac{p}{2}$ و $\beta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ جواب عمومی به صورت روبه‌روست:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت:

جواب عمومی به صورت $y = y_p + y_h$ است که y_p یک جواب خصوصی معادله ناهمگن و y_h جواب عمومی قسمت همگن معادله است.

اگر سمت راست معادله به شکل $f(x) = e^{\alpha x}(p_1(x) \cos \beta x + p_2(x) \sin \beta x)$ باشد جواب خصوصی y_p به صورت $y_p = X^k e^{\alpha x}(R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x)$ است، که چند جمله‌ای‌های $R_1(x)$ و $R_2(x)$ بایستی تعیین شوند. اگر $\alpha + \beta i$ ریشه‌ای برابر با ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نداشته باشد، $k=0$.

اگر $\alpha + \beta i$ یک ریشه ساده یا ریشه‌ای دوگانه داشته باشد، به ترتیب داریم: $k=1$ و $k=2$.

اعداد مختلط

نکته شماره ۱۷

با فرض دو عدد مختلط $(i = \sqrt{-1})$ $z_1 = a + bi$ ، $z_2 = c + di$ داریم:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

نمایش قطبی اعداد مختلط:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$$

ضرب در نمایش قطبی:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

معکوس یک عدد مختلط:

$$\frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$$

تقسیم در نمایش قطبی:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

توان n ام یک عدد مختلط:

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

ریشه n ام یک عدد مختلط:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). k = 0.1.2. \dots n-1$$

فرمول اولر:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

نکات آموزشی آمار مقدماتی

آمار توصیفی

نکته شماره ۱۸

آمار توصیفی شامل مجموعه ای از روشها برای برنامه ریزی آزمایش ها، بدست آوردن اطلاعات و سپس سازماندهی، خلاصه سازی، ارائه و تجزیه و تحلیل اطلاعات و در نهایت نتیجه گیری بر مبنای این اطلاعات می باشد. آمار در لغت به معنای شمارش است. آمار توصیفی، مجموعه روشهایی است که به خلاصه کردن، طبقه بندی، توصیف و تفسیر دادهها میپردازد. هدف آمار توصیفی، توصیف واقعیات موجود است که تنها خطای موجود در آن خطای اندازه گیری است، مشخص کردن قد دانش آموزان یک کلاس، بررسی روند رشد سرانه ملی در سه سال گذشته نمونه ای از مفاهیم مورد بررسی آمار توصیفی هستند. نمادهای مهم در آمار عبارتند از:

شاخص مورد مطالعه	نمونه (آماره)	جامعه (پارامتر)
میانگین	\bar{x}	μ (مو)
نسبت	ρ	\hat{P} (پی هت)
همبستگی	r_{xy}	ρ_{xy} (رو)
واریانس	s^2	δ^2 (سیگما به توان دو)
انحراف معیار	S	δ (سیگما)
تعداد	N	N

$$X_c = \text{حد میانی نمرات}$$

$$X = \text{نمره یا نمره ها}$$

$$F_i = \text{فراوانی مطلق}$$

$$L = \text{کرانه طبقات}$$

$$F_c = \text{انحراف نمره از میانگین}$$

$$X = \text{فراوانی تجمعی}$$

$$SS = \text{مجموع مجذورات انحراف نمره از میانگین}$$

$$X = \text{مجدور (مربع نمره) انحراف نمره از میانگین}$$

$$i = \text{فاصله طبقاتی}$$

$$M = \text{میانگین مجموع مجذور انحراف نمره از میانگین}$$

حد واقعی اعداد

حدود واقعی نمرات بصورت کم کردن 0/5 نمره در اعداد صحیح و در اعداد اعشاری، نیم واحد یعنی 0/05 - 0/005 و مانند آن کسر می شود. یعنی: کرانه عدد ۲۵ ← ۲۴/۵ تا ۲۵/۵ و کرانه عدد ۲۵/۵ ← ۲۵/۴۵ تا ۲۵/۵۵ می باشد. مفهوم حدود واقعی مخصوصاً زمانی مفید است که اعداد گروه بندی یا طبقه بندی شوند. مثال: پس از اجرای یک آزمون ریاضی مشاهده می شود که ۱۰ نفر نمره ۱۲ گرفته اند. این بدان

معنی نیست که همه توانایی یکسان دارند، بلکه دقیق نبودن وسیله اندازه گیری ممکن است موجب این امر شده باشد. به خاطر نیاز به حدود واقعی می باشد، یعنی $۱۲/۵ - ۱۱/۵$.

توزیع فراوانی

عبارتست از سازمان دادن اندازه ها یا مشاهدات به صورت طبقات همراه با فراوانی هر طبقه. توزیع فراوانی داده ها را بصورت خلاصه و مرتب، به نحوی که تفسیر آنها آسان شود، نمایش می دهند.

مراحل ساخت جدول توزیع فراوانی

۱. مرتب کردن اعداد از کوچک به بزرگ یا برعکس

۲. مشخص کردن تعداد دفعاتی که هر عدد تکرار شده است (تعداد فراوانی). زمانی که همه اعداد تک تک در جدول آورده شوند، جدول توزیع فراوانی منفرد یا طبقه بندی نشده گفته می شود. اما زمانی که نمره ها یا اعداد دارای دامنه گسترده ای هستند و تنظیم اعداد بصورت توزیع فراوانی طبقه بندی نشده و قتیگیر و طاقت فرسا است، اعداد را طبقه بندی می کنیم و از جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده استفاده می کنیم. (در حال حاضر با وجود رایانه طبقه بندی اعداد غیر منطقی است) زیرا: در اثر طبقه بندی کردن اطلاعات برخی از اطلاعات از بین می رود.

ستون داده ها (طبقات) را در جدول فراوانی با X نشان می دهند. فراوانی مطلق (f) برابر است با مقدار دفعات تکرار هر داده در هر طبقه.

مثال: در توزیع فراوانی درس آمار یک کلاس، نمرات به شرح زیر می باشد جدول فراوانی مربوط به توزیع را فراهم کنید؟

۱۰-۱۲-۱۱-۱۰-۱۱-۱۲-۱۰-۱۲-۱۵-۱۰-۱۱-۱۱-۱۱

X	F
15	1
12	3
11	5
10	4

نکته: با توجه به جدول فوق، عدد ۵ در ستون f بیانگر این است که عدد ۱۱ پنج بار تکرار شده است. اگر داده های ستون فراوانی (F) را با هم جمع کنیم تعداد کل داده ها بدست می آید. $N = \sum F$

یعنی در مثال فوق $N = ۱۳$

توزیع فراوانی طبقه بندی شده

زمانی که تعداد اعداد یک توزیع و همچنین فاصله بین آنها خیلی زیاد باشد، از توزیع فراوانی طبقه بندی شده استفاده می شود. نکته: زمانی که تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین نمره یا عدد مساوی یا بزرگتر از ۲۰ باشد از توزیع فراوانی طبقه بندی شده استفاده می شود. طبقات بایستی ناسازگار باشند. یعنی یک عدد معین فقط در یک طبقه قرار داده شود. نمره های فردی در این نوع توزیع ها هویت خود را از دست می دهند.

نحوه ساختن توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای ساختن توزیع فراوانی طبقه بندی شده دو روش وجود دارد.

الف) روش یکم دارای مراحل زیر است:

$$R = X_H - X_L + 1 \quad \text{۱- تعیین دامنه تعیین}$$

۲- تقسیم R به ترتیب بر 1-2-3-4 تا حاصل از ۲۰ کمتر شود عدد بدست آمده تعداد طبقات و مقسوم علیه فاصله طبقات می باشد.

۳- نوشتن طبقات: اولین عدد باید از کوچکترین عدد توزیع کوچکتر باشد و مضربی از فاصله طبقات نیز باشد.

۴- نوشتن فراوانی طبقات

ب) روش دوم دارای مراحل زیر است:

۱- تعیین دامنه تغییرات

$$K = 1 + 3/3 = \log N \quad \text{۲- تعیین تعداد طبقات با استفاده از قانون استرژ}$$

$$i = \frac{R}{K} \quad \text{۳- تعیین اندازه یا حجم هر طبقه (فاصله طبقات)}$$

۴- نوشتن طبقات

۵- نوشتن فراوانی طبقات

نکته: تعداد طبقات اختیاری است و معمولاً بین ۲۰-۱۰ است و اگر تعداد طبقات بزرگتر از ۲۰ باشد، تهیه و تنظیم جدول نیاز به وقت و کار بیشتر دارد. اگر تعداد طبقات کوچکتر از ۱۰ باشد اندازه طبقات بزرگ می شود و اطلاعات بیشتری از دست می رود.

نماینده طبقات (نقاط وسط طبقات): نماینده طبقات یا نقاط میانی را با X' نمایش می دهند و از طریق فرمول زیر به دست می آید:

$$X' = \frac{\text{طبقه بالایی حد} + \text{طبقه پایینی حد}}{2}$$

توزیع فراوانی تراکمی

اگر پژوهشگری علاقمند به دانستن تعداد افراد یا نمره هایی باشد که در پایین نمره یا عدد خاصی وجود دارند، نیاز به توزیع فراوانی تراکمی دارد. فراوانی تراکمی با (cf) نشان داده می شود که از جمع کردن فراوانی های ساده هر طبقه با طبقه بزرگتر به دست می آید.

نکته ۱: فراوانی تراکمی کوچکترین طبقه همیشه برابر با فراوانی ساده یا مطلق آن طبقه است.

نکته ۲: فراوانی تراکمی بزرگترین طبقه همیشه برابر با مجموع داده ها (ΣF) یا N می باشد.

محاسبه ی فراوانی نسبی

$$\text{نسبی فراوانی} = \frac{\text{مطلق فراوانی}}{\text{جمع کل فراوانی}}$$

درصد فراوانی مطلق و تراکمی

$$p = \frac{F}{N} \times 100$$

$$CF\% = \frac{CF}{N} \times 100$$

$$p = \frac{\text{فراوانی مطلق هر طبقه}}{\text{تعداد کل فراوانی ها}} \times 100$$

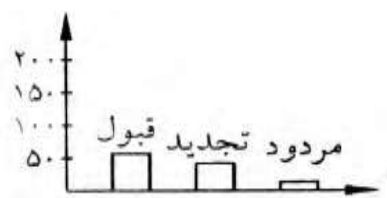
$$CF\% = \frac{\text{فراوانی تراکمی هر طبقه}}{\text{تعداد کل فراوانی ها}} \times 100$$

نمودارها

نمودار دایره‌ای: نموداری است که با داده های اسمی و کیفی بکار می رود. برای محاسبه درجه و زاویه مرکزی متعلق به یک گروه از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\text{درجه}^0 = \frac{n}{N} \times 360$$

مثال: اگر داخل یک گروه ۱۲۰ نفری ۶۰ نفر قبول، ۴۰ نفر تجدید و ۲۰ نفر مردود شده باشند، درجه مربوط به تجدیدی ها چند است؟



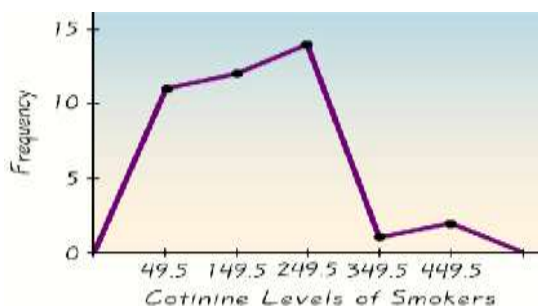
$$\text{درجه تجدیدی} = \frac{40}{120} \times 360 = 120$$

نمودار ستونی (میله‌ای): نموداری است که با داده های اسمی بکار می رود که در محور عمودی، فراوانی و در محور افقی طبقات قرار می گیرند. در نمودار میله ای فاصله بین اعداد و نقاط یکسان و ثابت است. مثل تعداد فرزندان. ولی اگر برای متغیرهای طبقه ای مانند قبولی - مردودی، رنگ چشم و اعتقادات مذهبی نمودار رسم شود، هیچ ضرورتی ندارد که فاصله ها در محور X ثابت می ماند. برای این متغیرها از نمودار دایره ای و مانند آن استفاده می کنند (نمودار پای).

نمودار هیستوگرام: با داده های فاصله ای و نسبتی به کار می رود. نموداری شبیه نمودار ستونی است، ولی در آن ستونها به هم چسبیده است و در محور افقی (X) کرانه (حدود واقعی) طبقات و در محور عمودی (Y) فراوانی مطلق قرار می گیرد.

نکته: این نمودار، اغلب در مواردی استفاده می شود که بخواهیم فقط یک نمودار واحد را نشان دهیم، درحالیکه در موقعیت های آزمایشی و شبه آزمایشی که مایلیم نمره های آزمودنی های دو گروه مجزا را با هم مقایسه کنیم ناگزیر هستیم از پلیگون استفاده کنیم.

نمودار چندضلعی (پلیگون): با داده های فاصله ای و نسبتی به کار می رود. نموداری شبیه نمودار هیستوگرام است که در محور X چند نمره میانی و در محور Y فراوانی مطلق قرار می گیرد.



نکته: برای مقایسه چند گروه در یک محور مختصات اگر تعداد آزمودنی ها در گروه ها برابر باشد، میتوان از نمودار ستونی و یا هیستوگرام استفاده کرد، ولی اگر تعداد افراد گروه ها برابر نباشد باید از این توزیع استفاده کرد

نمودار چندضلعی تراکمی (اجایو): مانند نمودار چندضلعی است که با داده های نسبتی و فاصله ای به کار میرود. در محور X کرانه طبقات و در محور Y فراوانی تجمعی قرار می گیرد. اگر به جای فراوانی تراکمی درصد فراوانی تراکمی را به صورت هندسی نمایش دهیم حاصل اجایو خوانده می شود.

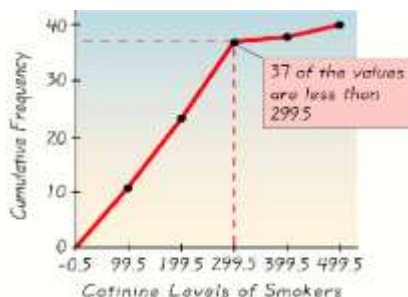
این نمودار وقتی مفید است که پژوهشگر علاقمند باشد وضعیت یک نمره یا یک فرد را نسبت به بقیه نمره ها یا افراد مشخص کند. برای ترسیم این نمودار در روی محور عرضی (Y) فراوانی تراکمی و در روی محور طولی (X) حدود واقعی طبقات قرار می گیرد. مثل نمودار چند ضلعی است.

شاخص های گرایش مرکزی

نما (مد)

بی ثبات ترین شاخص گرایش مرکزی است که با داده های اسمی بکار می رود و عددی است که دارای بیشترین فراوانی می باشد.

مثلاً: 1-5-6-7-5-6-7-6-6-6-6-6-6-6-5-9



در اینجا نماد عدد ۶ است. برخی موارد توزیع، دونمایی یا چند نمایی می شود مثل: 1-2-3-2-4-5-5-6-7

در اینجا ۲ و ۵ نما هستند که نما در اصل $\frac{2+5}{2} = 3/5$ است.

X	F_i
5	5
4	9
3	3
2	2
1	6

در جدول فراوانی، نما عبارتست از عددی که F_i آن بزرگتر است.

در اینجا عدد ۴ نما است، زیرا عدد چهار، ۹ بار تکرار شده است.

نکته ۱: برای محاسبه نما باید ابتدا اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

نکته ۲: در موقعیت هایی که دو عدد مجاور X فراوانی یکسان داشته باشند که بزرگتر از فراوانی سایر ارزش های X باشند، نما را می توان به طور قراردادی به عنوان میانگین دو ارزش مجاور X در نظر گرفت.

$$1-2-3-3-4-4-5 \text{ میانه} = \frac{3+4}{2} = 3/5$$

نکته ۳: در جایی که ارزش های غیر مجاور فراوانی های بزرگتر از فراوانی های طبقه های مجاور داشته باشند، هر کدام از این ارزش ها را می توان به عنوان نما در نظر گرفت. در چنین شرایطی توزیع دونمایی نامیده می شود.

11-11-12-12-12-13-13-13-13-14-14-14-1-1-15-15-16-16-17-17-18

در اینجا عدد ۱۳ پنج بار تکرار شده به طوری که این فراوانی بزرگتر از فراوانی ارزش های مجاور است. همچنین عدد ۱۵ چهار بار تکرار شده و این فراوانی نیز بزرگتر از فراوانی ارزش های مجاور است. این مجموعه از مشاهده ها دارای دونما است.

محاسبه نما در داده ای طبقه بندی شده

از معادله ی زیر محاسبه می شود، که در آن:

$L =$ حد واقعی پایین طبقه ای که دارای بیشترین فراوانی است

$i =$ طول یا فاصله طبقات

$d_1 =$ تفاوت فراوانی طبقه نمودار از فراوانی طبقه قبل

$d_2 =$ تفاوت فراوانی طبقه نمودار از طبقه بعد.

مثال:

X	F
54-56	1
57-59	3
60-62	6
63-65	8
66-68	2

$$MO = L + i \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

$$d_1 = 8 - 6 = 2$$

$$d_2 = 8 - 2 = 6 \quad \leftarrow \text{طبقه نما}$$

$$MO = 62/5 + 3 \left(\frac{2}{2 + 6} \right) = 63/25$$

نکته: چنانچه توزیع نرمال باشد، نما از فرمول زیر محاسبه می شود. $MO = 3MD - 2\bar{X}$

میانۀ

میانۀ جایگاهی در توزیع نمره هاست و توزیع نمره ها را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند؛ یعنی جایی است که دقیقاً ۵۰ درصد نمره ها بالای آن و ۵۰ درصد نمره ها زیر آن قرار می گیرند. میانۀ از نما باثباتر و از میانگین بیثباتر است و با داده های رتبه ای بکار می رود. زیرا ما ابتدا نمره ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

طریقه محاسبه میانۀ نمرات خام در اعداد گسسته

ابتدا نمره ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم و سپس اگر تعداد اعداد فرد باشد، میانۀ، عدد وسط است.

مثال: ۱۲-۹-۴-۳-۱-۵

مثال: ۱۲-۹-۴-۵-۳-۱ در اینجا عدد ۵ میانۀ است

مثال: در توزیع اعداد ۳۱-۴-۵-۲۱-۳۰-۱۷-۸-۱۲ میانۀ برابر است با ۱۷

طریقه محاسبه میانۀ اعداد خام در تعداد زوج

۱. اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

۲. دو عدد وسط را با هم جمع و تقسیم بر دو می کنیم. ۱۲-۹-۲-۸-۵-۳

۸+۵ برابر ۱۳ و ۱۳ تقسیم بر ۲ میانۀ محاسبه می شود که برابر ۶/۵ می باشد. ۱۲-۹-۲-۸-۵-۳

نکته: هنگامی که نمره یا عددی که توزیع را به دو قسمت تقسیم می کند تکراری است، میانۀ از طریق محاسبه بدست می آید.

(الف) ابتدا حد پایین عدد تکراری که میانۀ یکی از آنها است را می نویسیم

(ب) کسری را در نظر می گیریم که مخارج آن تعداد اعداد تکراری و صورت آن نشان دهنده تعداد اعداد تکراری است که در سمت چپ خط رسم کننده میانۀ قرار می گیرند.

(ج) حاصل مراحل (الف) و (ب) را با هم جمع و میانۀ را بدست می آوریم. (میانۀ روی عدد ۴ میافتد، بنابراین نیمی از آن بعلاوه ی یک مورد ۴ قبل از آن جمعاً ۱/۵ تا از ۴ها به حد پایین اضافه می شود): مانند:

$$\text{میانۀ} = 3/5 + \frac{1/5}{2} = 4/5 \quad 6-5-4-3$$

$$\text{میانۀ} = 3/5 + \frac{2}{2} = 3/17 \quad 3-3-2-1-5-4-3-6$$

محاسبه میانۀ در جدول اعداد طبقه بندی شده

۱. ابتدا نمرات را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

۲. سپس توزیع فراوانی و جدول را تشکیل و با فرمول نمرات طبقه بندی شده میانۀ را محاسبه می کنیم.

مثال: ۳-۵-۲-۴-۸-۴-۴-۴-۲

مثال:

X	F_i	F_c
8	1	10
5	1	9
4	5	8
3	1	3
2	2	2
	$\sum F$ = 10	

$$md = L + \frac{\frac{N-F_c}{2}}{F_i} i \quad \text{حد پایین طبقه میانه دار}$$

$$\frac{N}{2} = \text{طبقه ی میانه دار} = \text{مجموع فراوانی تقسیم بر دو}$$

F_c = فراوانی تجمعی ما قبل سطری که در آن میانه واقع شده است.

F_i = فراوانی مطلق طبقه میانه دار

i = فاصله طبقاتی

$$F_c = 3 \quad F_i = 5 \quad i=1$$

مثال:

$$md = L + \frac{\frac{N-F_c}{2}}{F_i} i \quad md = 3/5 + \frac{5-3}{5} \times 1 \quad md=3/9$$

نکته: در صورتی که داده در مقیاس فاصله ای یا نسبی باشند، بهترین شاخص، گرایش مرکزی میانگین است ولی اگر در توزیعی که نمره ای در کرانه (نمره خیلی بزرگ یا خیلی کوچک) باشد (توزیع دارای) کجی باشد میانه شاخص مناسب تری است. به عنوان مثال در توزیع ۳۰۰-۱۵-۹-۷-۶-۵ میانه مناسب تر است.

ویژگی ها

۱- نسبت به اعداد بزرگ یا کوچک حساس نیست. بنابراین بهترین شاخص است که تمرکز اعداد را در وسط توزیع نشان می دهد. به عنوان مثال در توزیع های زیر که دارای میانگین های متفاوتی هستند، میانه برابر و مساوی ۲۰ می باشد.

$$۲۵-۲۴-۲۰-۷-۵ \quad \text{و} \quad ۶۳-۵۲-۲۰-۱۵-۱۰$$

۲- مورد استفاده میانه زمانی است که مقیاس اندازه گیری رتبه ای باشد، هرچند که می تواند برای داده هایی با مقیاس فاصله ای و نسبی هم استفاده شود.

۳- مجموع قدر مطلق انحرافهای نمره ها از میانه کوچکتر یا مساوی مجموع قدر مطلق انحرافهای نمره ها از هر عدد دیگری است (بدون در نظر گرفتن علامت).

$\sum X - MD \leq \sum X - C $					
نمره ها	قدر مطلق انحرافات				
	میانه (۶)	۴	۵	۷	۹
۴	۲	۰	۱	۳	۵
۵	۱	۱	۰	۲	۴
۶	۰	۲	۱	۱	۳
۷	۱	۳	۲	۰	۲
۹	۳	۵	۴	۲	۰
	۷	۱۱	۸	۸	۱۴

میانگین

میانگین، باثبات ترین شاخص گرایش مرکزی است که با داده های فاصله ای و نسبی بکار می رود و مرکز ثقل داده هاست.

طریقه محاسبه میانگین اعداد خام

مثال: ۱۱-۹-۱۰

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \rightarrow \text{میانگین} = \frac{\text{مجموع نمره ها}}{\text{تعداد نمره ها}}$$

$$\bar{X} = \frac{10 + 9 + 11}{3} = 10 \quad \bar{X} = 10$$

طریقه محاسبه اعداد طبقه بندی شده با $i=1$

$$\bar{X} = \frac{\sum F \cdot X}{N}$$

طریقه محاسبه میانگین اعداد طبقه بندی شده با $i \neq 1$

$$\bar{X} = \frac{\sum F \cdot X_c}{n}$$

حد میانی طبقه

X_c برای پیدا کردن حد میانی نمرات، دو نمره طبقه را با هم جمع و تقسیم بر ۲ می نماییم. $(5+7=12 \div 2=6)$

نکته

۱. اگر میانگین و میانه و نما با هم برابر باشد، توزیع متقارن است و کجی آن صفر است.

$$\bar{x} = md = m_o$$

۲. اگر میانگین بزرگتر از میانه و میانه بزرگتر از نما باشد کجی مثبت است، یعنی اکثر نمرات پایین بوده و امتحان سخت است.

$$\bar{x} > md > m_o$$

۳. اگر میانگین کوچکتر از میانه و میانه کوچکتر از نما باشد، کجی منفی است و اکثر نمرات بالاست و امتحان آسان بوده است.

$$\bar{x} < md < m_o$$

۴. کشیدگی ارتفاع (Y) منحی را نشان می دهد. به برآمدگی یا خوابیدگی منحی در مقایسه با منحی طبیعی کشیدگی گویند.

۵. در صورتی که یک نمره ثابت (C) در کلیه نمرات یک توزیع ضرب، تقسیم، جمع و یا تفریق شود، در هر چهار حالت میانگین تغییر می کند، یعنی، میانگین قبلی در آن عدد ثابت ضرب، تقسیم، جمع و یا تفریق می شود.

$$\bar{X}_1 = \bar{X} \cdot C \quad \bar{X}_1 = \bar{X} : C \quad \bar{X}_1 = \bar{X} + C \quad \bar{X}_1 = \bar{X} - C \quad \text{جدید}$$

۶- مجموع انحراف نمره ها از میانگین همیشه صفر است. $\sum (\bar{X} - X) = 0$ در واقع شاخصی از مکان مرکزی به معنای حداقل مجذورات است.

۷- مجموع مجذور انحرافات از میانگین همیشه می نیمم است (کمتر از هر عدد دیگری است).

$$\sum (X - \mu)^2 < \sum (X - a)^2$$

رابطه شاخص های گرایش به مرکز

$$md = \frac{mo + 2\bar{X}}{3} \quad \bar{X} = \frac{3md - mo}{2} Mo = 3md - 2\bar{X}$$

میانگین میانگین ها

$$\bar{X}_T = \frac{\sum \bar{X}_i}{N} \quad n_1 = n_2 = \dots = n_n \text{ در صورتی که حجم نمونه ها برابر باشد یعنی } n$$

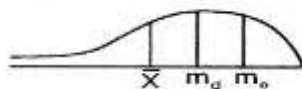
مثال:

$$n_3 = 10 \quad n_2 = 10 \quad n_1 = 10 \quad \bar{X}_3 = 15 \quad \bar{X}_2 = 10 \quad \bar{X}_1 = 5$$



خواهیم داشت:

$$\bar{X}_T = 10\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3}{N} = \frac{5 + 10 + 15}{3} = 10$$



در صورتی که حجم نمونه ها برابر نباشد به طریق زیر محاسبه می شود:

$$\bar{X}_T = \frac{\sum \bar{X}_i \cdot n_i}{n_i} \rightarrow \frac{\bar{X}_1 \cdot n_1 + \bar{X}_2 \cdot n_2 + \bar{X}_3 \cdot n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

مثال:

$$n_3 = 20 \quad n_2 = 10 \quad n_1 = 15 \quad \bar{X}_3 = 15 \quad \bar{X}_2 = 10 \quad \bar{X}_1 = 5$$

$$\bar{X}_T = 10/55 \quad \bar{X}_T = \frac{(5 \times 15) + (10 \times 10) + (15 \times 20)}{15 + 10 + 20} = 10/55$$

میانگین هارمونیک (همساز)

این نوع میانگین برای مواردی بکار می رود که مقیاس ترکیبی باشد مانند متر در ثانیه و کیلومتر بر ساعت. این میانگین در عینک سازی و مطالعه شبکه های برقی به کار می رود.

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{N} \left[\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n} \right]}$$

مثال: میانگین سرعت های ۵ و ۶ و ۷ و ۲ کیلومتر در ساعت ۴ ماشین چند است؟

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \right]} = 3/96$$

میانگین هندسی

نوعی میانگین است که با G نشان داده می شود و معمولاً هرگاه X_i ها از درصدها یا نسبت ها تشکیل شده باشند، استفاده میشود. در کارهای اقتصادی یا جمعیت شناسی به کار می رود.

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot (X_n)}$$

مثال: میزان سود شرکت مهرداد در ۵ سال گذشته برحسب درصد به ترتیب ۳، ۴، ۳، ۲، ۴ شده است. کدامیک از گزینه های زیر وضع سود آوری شرکت را بهتر نشان می دهد.

$$G = \sqrt[5]{3 \times 4 \times 4 \times 2 \times 3} = 3/01$$

تفسیر: اعدادی مانند ۳ و ۶ و ۴ را می توان به عنوان فاصله های بین نقاط نشان داد. حاصل ضرب این دو عدد را نیز می توان به عنوان یک مساحت نشان داد. بنابراین مستطیلی که عرض آن ۸ و طول آن ۱۵ سانتی متر است، مساحتی برابر ۱۲۰ سانتی متر مربع دارد. ریشه دوم ۱۲۰ یا ۱۰/۹۵ بعدی از یک مربع است که مساحت آن با مساحت مستطیل ۸ ضرب در ۱۵ برابر است. به همین ترتیب حاصل ضرب سه عدد، مبین یک حجم است و ریشه سوم حاصل ضرب آنها بعدی از یک مکعب با همان حجم است).

رابطه بین سه میانگین فوق به صورت زیر است:

$$\bar{X} > G > HM$$

میانگین وزنی > میانگین هندسی > میانگین هارمونیک

نکته: اگر بین داده ها عدد صفر یا منفی وجود داشته باشد نمی توان از این روش استفاده کرد.

شاخص های پراکندگی

فرض کنید گفته شود درجه حرارت دما در مکانی ۶۵ درجه فارنهایت است. اگر صرفاً با نگاه کردن به میانگین نتیجه بگیریم که این مکان برای زندگی مناسب است، خطا کرده ایم. زیرا این عدد مقدار متوسط ماه های زمستان و تابستان است. ما نیاز داریم تغییرپذیری درجات حرارت را بدانیم. یعنی درجه حرارت روزانه چقدر از متوسط ۶۵ درجه فارنهایت متفاوت است. از این رو باید شاخص های پراکندگی که نشان می دهد داده ها از میانگین چقدر دور و یا به آن نزدیک هستند را محاسبه کنیم. شاخص های پراکندگی، میزان پراکنده بودن نمرات حول و حوش مرکز داده ها را نشان می دهد که به ترتیب عبارتند از: دامنه تغییرات - انحراف متوسط، انحراف چارکی، واریانس و انحراف معیار.

دامنه تغییرات (R)

دامنه تغییرات یک شاخص پراکندگی و درواقع بی ثبات ترین شاخص و حساس ترین شاخص پراکندگی است که با داده های فاصله ای بایستی بکار رود و تفاضل بین کوچکترین و بزرگترین عدد در توزیع است (بدون در نظر گرفتن حدود واقعی اعداد)

$$R = \max - \min$$

$$R = \max - \min + 1$$

مثال: در توزیع نمرات ۳-۲۰-۱۴-۱۵-۹-۶-۵ دامنه تغییرات را محاسبه کنید:

$$R = 20 - 3 + 1 = 18$$

$$R = 18$$

نکته:

۱- دامنه تغییرات، برای نمونه های بزرگ شاخص بی ثباتی است.

۲- واریانس نمونه برداری دامنه تغییرات برای نمونه های کوچک، بزرگتر از واریانس نمونه برداری انحراف معیار نیست. ولی سریعاً با زیاد شدن N افزایش می یابد.

۳- دامنه تغییرات به جز در موارد خاص مستقل از حجم نمونه نیست.

۴- دامنه تغییرات برای نمونه های کوچک مناسب است.

انحراف چارکی

بیشتر در مواردی کاربرد دارد که نمره ها دارای مقیاس رتبه ای هستند و یا نمره ای در کرانه باشد. پراکندگی را در اطراف مرکز توزیع نشان می دهد. در داده های پرت به جای انحراف استاندارد استفاده می شود.

مثال: برای نمرات ۶۰۰-۳۲-۱۵-۹-۶-۵-۳ انحراف چارکی مناسب است؟

Q_1 md Q_3

$$SIRQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{\text{چارک اول} - \text{چارک سوم}}{2}$$

$$Q = \frac{32 - 5}{2} = 13/5$$

برای محاسبه چارک متوسط اعداد طبقه بندی شده نیاز به محاسبه چارک اول و سوم داریم. شرایط استفاده از چارک متوسط (انحراف چارکی) مانند میانه است. بهترین مورد استفاده از انحراف چارکی هنگامی است که چولگی شدید است، زیرا تحت تأثیر نمرات بالا و پایین قرار نمیگیرد. این شاخص از دامنه تغییرات کوچکتر است.

محاسبه چارک ها در اعداد طبقه بندی شده

۱. اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۲. میانه را حساب کنید. Q_2

سؤال: میانه اعداد سمت چپ و راست را محاسبه کنید. Q_1 و Q_2 مثال :

6-8-9-11-12-13-14-17

$$Q_1 = 8/5 \quad Q_2 = 11/5 \quad Q_3 = 13/5$$

نکته ۱

چارک یکم: یعنی نقطه ای که یک چهارم افراد زیر آن و سه چهارم بالای آن قرار دارند.

دهک یکم: نمره های یک دهم افراد زیر آن و ۹/۰ افراد از آن بزرگتر است.

صدک یکم: نمره های یک صدم افراد زیر آن و ۹۹/۰ افراد بالای آن قرار دارد.

نکته ۲: پس از محاسبه نمره چارک اول و سوم انحراف چارکی بدست می آید در صورتی که:

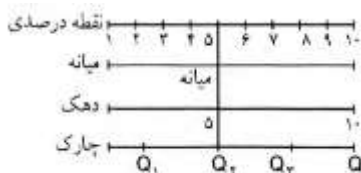
$$Q_3 - Q_2 < Q_2 - Q_1 \quad \text{کجی منفی} \quad Q_3 - Q_2 > Q_2 - Q_1 \quad \text{کجی مثبت} \quad Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1 \quad \text{متقارن}$$

نقطه درصدی P_n

نقاط درصدی نمره را بر مقیاس صد نشان می دهد. یعنی نقطه ۵۰ درصدی برابر میانه است و نقطه ۲۵ درصدی برابر چارک اول است و نقطه ۷۵ درصدی برابر چارک سوم است.

$$P_{0/10} = D_1 \quad P_{0/20} = D_2 \quad P_{0/50} = md = Q_2 \quad P_{0/25} = Q_1 \quad P_{0/75} = Q_3$$

دهک هم مثل نقطه درصدی، موقعیت نمره را در مقیاس ۱۰ تایی نشان می دهد و چارک هم موقعیت نمره را در مقیاس ۲۵ تایی در چهار موقعیت نشان می دهد.



فرمول محاسبه میانه و دیگر نقاط:

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{1N}{4} - F_c}{F_i}\right)i \quad md = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F_c}{F_i}\right)i \quad Q_2 = L + \left(\frac{\frac{2N}{4} - F_c}{F_i}\right)i$$

$$D_6 = L + \left(\frac{\frac{6N}{10} - F_c}{F_i}\right)i \quad D_1 = L + \left(\frac{\frac{1N}{10} - F_c}{F_i}\right)i \quad P_{40} = L + \left(\frac{\frac{40N}{100} - F_c}{F_i}\right)i$$

مثال: چارک سوم، چارک اول انحراف چارکی دهک دوم، صدک شصت و هشتم را در داده های زیر محاسبه کنید.

X	F_i	F_c
25-29	17	100
20-24	29	86
15-19	21	54
10-14	18	33
5-9	18	15
	$\sum F_i = 100$	

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_c}{F_i} \cdot i$$

$$N = \frac{3 \times 100}{4} = 75$$

$$L = 19/5$$

$$F_c = 54$$

$$i = 5F_i = 29$$

$$Q_3 = \frac{19}{5} + \left(\frac{75 - 54}{29} \right) \times 5 = 23/12$$

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - F_c}{F_i} \right) i \quad F_c = 15 \quad L = 9/5$$

$$Q_1 = \frac{9}{5} + \left(\frac{25 - 15}{18} \right) \times 5 = \frac{12}{28}$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{23/12 - 12/28}{2} = 5/42 \quad (Q \text{ چارکی انحراف})$$

$$D_2 = L + \left(\frac{\frac{2N}{10} - F_c}{F_i} \right) i$$

$$L = 9/5$$

$$F_c = 15$$

$$D_2 = \frac{9}{5} + \left(\frac{20 - 15}{18} \right) \times 5 \rightarrow D_2 = 10/89$$

$$F_c = 54 \quad L = 19/5 \quad P_{N(0/68)} = L + \left(\frac{\frac{68n}{100} - F_c}{F_i} \right) i$$

$$I = 5$$

$$F_{i=29}$$

$$\frac{0/68 \times 100}{100} = 68$$

$$P_{(0/68)} = \frac{19}{5} + \left(\frac{68 - 54}{29} \right) \times 5 \rightarrow P_{(0/68)} = 21/91$$

رتبه درصدی

رتبه درصدی مثل نمره های استاندارد است که موقعیت نسبی فرد را در داخل گروه نشان می دهد یعنی با داشتن رتبه درصدی فرد می توانیم بگوییم که او از چند درصد گروه بهتر و یا بدتر عمل کرده است.

$$P_R = \left(\frac{F_c + \frac{F_i}{2}}{n} \right) \times 100$$

نکته: رتبه درصدی موقعیت فرد را در گروه و نقطه درصدی موقعیت نمره فرد را در داخل نمره ها (X) نشان می دهد. بطور مثال کسی که با نمره ۱۸، رتبه درصدی ۸۵ کسب کند، یعنی نمره ۱۸ (نقطه درصدی) از ۸۵ درصد افراد (رتبه درصدی) بهتر و از ۱۵ درصد افراد بدتر عمل کرده است.

مثال: اگر بخواهیم رتبه درصدی عدد ۲۲ را در جدول فوق مشخص کنیم، خواهیم داشت.

$$P_R = \left(\frac{54 + \frac{29}{2}}{100} \right) \times 100 = 68/5 \quad P_R = 68/5 \quad P_R = \left(\frac{F_c + \frac{F_i}{2}}{n} \right) \times 100$$

نکته ۱: در توزیع های نامتقارن اغلب از میانه به عنوان شاخص مرکزی و انحراف چارکی به عنوان شاخص پراکندگی استفاده می شود.

نکته ۲: اگر انحراف چارکی اندازه ها برابر صفر باشد، ۵۰ درصد اندازه هایی که در وسط قرار گرفته اند، با هم برابرند. در نتیجه چارک های یکم و دوم و سوم با هم برابرند و برعکس.

پرسش: کدام پراکندگی برای توزیع فراوانی زیر مناسب تر است؟

حدود طبقات	۵۰-۲۰	۴۰-۲۰	۶۰-۴۰	۶۰ و بیشتر
فراوانی	۲۵	۳۵	۳۰	۱۰

الف) انحراف چارکی ب) انحراف معیار ج) ضریب تغییرات د) انحراف متوسط

پاسخ: گزینه (الف) صحیح است.

انحراف متوسط (MD)

انحراف متوسط، یک شاخص پراکندگی است که به آن میانگین قدر مطلق انحراف نمره از میانگین گفته می شود.

$$MD = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N}$$

مثال: برای اعداد ۱-۲-۳-۴-۵ خواهیم داشت:

X	$X - \bar{X}$	$ X - \bar{X} $	
5	2	2	
4	1	1	
3	0	0	
2	-1	1	
1	-2	2	
		$\sum X - \bar{X} = 6$	

$$md = \frac{6}{5} = 1/2$$

نکات مهم

۱- با این شاخص عملیات جبری را نمی‌توان انجام داد.

۲- در انحراف متوسط علائم اعداد و در انحراف چارکی کلیه اعداد مورد مطالعه قرار نمی‌گیرند.

۳- تأثیر انحرافات بزرگ را در شرایطی که تعداد زیادی انحرافات کوچک در برابر تعداد کمی انحراف بزرگ باشد، نشان نمی‌دهد (مهمترین کاستی).

۴- انحراف متوسط اعداد ثابت صفر است.

واریانس (S^2)

یک شاخص پراکندگی است که میانگین مجموع مجذورات انحراف نمره از میانگین می‌باشد؛ یعنی:

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum (X)^2}{n} = \frac{ss}{n} = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}$$

محاسبه واریانس از راه انحراف نمره از میانگین

مثال برای اعداد ۱-۲-۳-۴-۵

$$S^2 = \frac{10}{5} = 2$$

X	$X - \bar{X}$	x^2
5	2	4
4	1	1
3	0	0
2	-1	1
1	-2	4
$\sum X - \bar{X} = 0$		$\sum x^2 = 10$

$$S^2 = \frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}{n}$$

محاسبه واریانس از راه نمرات خام

نکته: هنگامی که واریانس را در نمونه محاسبه می‌کنیم در مخرج کسر ۱-n که به آن درجه آزادی (df) گفته می‌شود استفاده می‌کنیم.

درجه آزادی: تعداد مشاهداتی است که می‌تواند آزادانه تغییر کند. بنابراین درجه آزادی واریانس ۱-n= df می‌باشد.

نکته مهم: واریانس ۵ عدد متوالی در نمونه برابر ۲/۵ و واریانس ۵ عدد متوالی در جامعه برابر ۲ می‌باشد.

X	x^2
5	25
4	16
3	9
2	4
1	1
$\sum X = 15$	$\sum x^2 = 55$

$$S^2 = \frac{55 - \frac{(15)^2}{5}}{5} = 2$$

انحراف معیار (انحراف استاندارد) S

$$S = \sqrt{2} = 1/41$$

جذر واریانس را انحراف معیار می گویند، یعنی در مثال فوق؛

نکته: توان دوم انحراف معیار، واریانس نام دارد. انحراف معیار، باثبات ترین شاخص پراکندگی است. هرچقدر انحراف استاندارد بیشتر باشد، پراکندگی بیشتر است. شاید اساسی ترین فایده انحراف استاندارد این باشد که با استفاده از آن می توان مشخص کرد چه نسبتی از نمره ها در فاصله های مختلف نسبت به میانگین قرار گرفته است.

نکته مهم: زمانی که توزیع دارای کجی زیاد باشد از انحراف استاندارد باید با احتیاط استفاده شود. زمانی از S استفاده میشود که میانگین به عنوان شاخص مرکزی مورد استفاده قرار می گیرد. کلیه شاخص های پراکندگی (دامنه تغییرات، انحراف متوسط، انحراف معیار) با مقیاس حداقل فاصله ای بکار می روند.

ثبات پراکندگی به ترتیب

کمتر

بیشتر

انحراف معیار ← واریانس ← انحراف متوسط ← چارک متوسط ← دامنه تغییرات

$$R \leftarrow Q \leftarrow MD \leftarrow S^2 \leftarrow S$$

$$S > MD > Q \text{ : نکته مهم}$$

تأثیر چهار عمل اصلی در واریانس

در شرایط جمع و تفریق یک عدد ثابت در نمرات یک توزیع واریانس تغییر نمی کند.

$$S_1^2 = S^2$$

جمع

$$S_1^2 = S^2$$

تفریق

ولی در شرایط ضرب و تقسیم، واریانس قدیم در توان دوم مجذور عدد ثابت ضرب یا تقسیم می شود.

$$S_1^2 = S^2 : C^2$$

ضرب

$$S_1^2 = S^2 : C^2$$

تقسیم

مثال: اگر واریانس یک توزیع ۳۲ باشد و عدد در کلیه نمرات توزیع ضرب شود واریانس جدید برابر خواهد بود با:

$$S_1^2 = 2 \times 3^2 = 18$$

اگر واریانس ۵ و عدد ثابت ۶ با کلیه نمرات جمع شود، واریانس جدید برابر است با: $S_1^2 = 5$ (تغییری نمی کند)

تأثیر چهار عمل اصلی در انحراف معیار

در شرایط جمع و تفریق مثل واریانس است؛ یعنی، انحراف معیار تغییری نمی کند، ولی در شرایط ضرب و تقسیم مثل میانگین است؛ یعنی، در همان عدد ثابت ضرب یا تقسیم می شود.

$$\begin{array}{ll} S_1 = S & \text{تفریق} \\ S_1 = S : C & \text{تقسیم} \\ S_1 = S & \text{جمع} \\ S_1 = S : C & \text{جمع} \end{array}$$

مثال: اگر انحراف معیار یک توزیع ۶ و یک نمره ثابت ۲ در کلیه نمرات توزیع ضرب شود، انحراف معیار جدید برابر است:

$$S_1 = 6 \times 2 = 12$$

اگر انحراف معیار یک توزیع ۶ و نمره ثابت ۳ با کلیه نمرات توزیع جمع شود انحراف معیار جدید برابر است با:

$$S=6 \text{ (تغییری نمی کند)}$$

نکات مهم

- ۱- میانه و نما در جمع و تفریق و ضرب و تقسیم یک عدد ثابت تابع میانگین بوده و مثل هم تغییر می کنند.
- ۲- در جمع و تفریق، واریانس - انحراف معیار - انحراف متوسط - دامنه تغییرات و انحراف چارکی مثل هم بوده و تغییر نمی کنند.
- ۳- در شرایط ضرب و تقسیم، انحراف معیار - انحراف متوسط - انحراف چارکی و دامنه تغییرات در همان عدد ضرب یا تقسیم می شوند.
- ۴- واریانس در مجذور آن عدد ضرب یا تقسیم می شود.
- ۵- واریانس اعداد ثابت صفر است.
- ۶- اگر چند جامعه با هم ترکیب شوند، میانگین و واریانس جامعه کل ترکیبی، بزرگتر از میانگین و واریانس جوامع تشکیل دهنده خواهد بود. مگر آن که میانگین جوامع برابر باشد که در آن صورت واریانس آنها هم برابر است.
- ۷- واریانس تفاوت ها در نمونه های همبسته برابر است با:

$$S_{y_1}^2 - S_{y_2}^2 = S_{y_1}^2 + S_{y_2}^2 - 2\rho S_{y_1} S_{y_2}$$

۸- واریانس تفاوت ها در نمونه های مستقل برابر است با:

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2 = \frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}$$

۹- واریانس مجموع برابر است با:

$$S_{(X+Y)}^2 = S_X^2 + S_Y^2 \pm 2Cov(X.Y) = (S_X^2 + S_Y^2) \pm 2rS_X S_Y$$

تصحیح شپرد

فرمول شپرد برای تصحیح انحراف معیار زمانی کاربرد دارد که فاصله طبقاتی بزرگ و تعداد طبقات کمتر از ۱۲ باشد.

$$S_c = \sqrt{S^2 - \frac{i^2}{12}}$$

مثال: اگر فاصله طبقاتی ۱۰ و انحراف معیار توزیع ۵ باشد، انحراف معیار تصحیح شده برابر خواهد بود با:

$$S_c = \sqrt{25 - \frac{10^2}{12}} = 4/97$$

ضریب پراکندگی (۷)

همان ضریب نسبی واریانس است که بر اساس آن پراکندگی ویژگی یک گروه را با پراکندگی ویژگی دیگر همان گروه مقایسه می کنند.

$$V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \times 100$$

مثال: کارخانه ای دو نوع لاستیک اتومبیل تولید می کند. برای نوع الف میانگین عمر ۱۰۰۰۰ کیلومتر، با انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلومتر، و برای نوع ب میانگین عمر ۱۱۰۰۰ کیلومتر با انحراف استاندارد ۱۰۰۰ کیلومتر می باشد. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

$$V = \frac{1000}{11000} \times 100 = 9 \text{ (ب)}$$

$$V = \frac{2000}{10000} \times 100 = 20 \text{ (الف)}$$

پاسخ: نوع (ب) بهتر است، زیرا هم میانگین عمر آن بیشتر است و هم ضریب تغییر آن کوچکتر.

موارد استفاده

زمانی که دو یا چند جامعه در مقایسه با هم دارای مشاهدات ناهمگون از نظر واحد اندازه گیری باشند، مانند یک جامعه برحسب متر و یک جامعه برحسب اینچ، و یا چند جامعه دارای میانگین های متفاوتی باشند، استفاده میشود. گاهی نیز مقیاس صفت مورد اندازه گیری در دو جامعه یکسان است ولی بزرگی مشاهدات آنها به طور قابل ملاحظه ای تفاوت دارد. مانند مقایسه پراکندگی سود و زیان در صنایع دستی با صنایع سنگین.

نکته ۱: ضریب تغییرات اعداد ثابت برابر صفر است.

پرسش: برای تعیین آنکه در ۳۰ روز گذشته به نسبت، قیمت دلار از ثبات بیشتری برخوردار بوده است یا یورو، استفاده از کدام شاخص آماری مناسب تر است؟

الف) انحراف متوسط ب) ضریب پراکندگی ج) ضریب چولگی د) واریانس

پاسخ: گزینه (ب) صحیح است.

گشتاورهای پیرامون میانگین

$$m_1 = \frac{\sum(X - \bar{X})}{N} = 0 \quad \text{گشتاور اول:}$$

$$m_2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n} = S^2 \quad \text{گشتاور دوم:}$$

$$m_3 = \frac{\sum(X - \bar{X})^3}{n} \quad \text{گشتاور سوم:}$$

$$m_4 = \frac{\sum (X - \bar{X})^4}{n} \quad \text{گشتاور چهارم:}$$

گشتاور اول همیشه صفر است. گشتاور دوم همان واریانس است. گشتاور سوم برای محاسبه چولگی (کجی) بکار می رود یعنی:

$$SK = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}}$$

گشتاور چهارم برای محاسبه کشیدگی بکار می رود، یعنی:

$$Kg = \frac{m_4}{(m_3)^2} - 3$$

نکته ۲: کشیدگی معیاری است بدون واحد که ارتفاع را نشان می دهد و رابطه معکوس با پراکندگی دارد.

اگر $k=0$ باشد، کشیدگی هم اندازه و هم ارتفاع توزیع نرمال است، اگر $k > 0$ باشد، از نرمال بزرگتر و پراکندگی کمتر و اگر $k < 0$ باشد، از نرمال کوتاهتر و پراکندگی بیشتر است.

$$g_1 = \frac{\bar{X} - m_1}{s}$$

فرمول کجی پیرسون

نکته:

۱- اگر $|sk| \leq 0.1$ باشد، تقریباً کجی وجود ندارد و جامعه نرمال است.

۲- اگر $0.1 \leq |sk| \leq 0.5$ باشد چولگی موجود اندک ولی غیر قابل اغماض است. در حقیقت جامعه از نظر تقارن اندکی با توزیع نرمال متفاوت است.

۳- اگر $|sk| > 0.5$ باشد چولگی زیاد و غیر قابل اغماض است. به عبارت دیگر جامعه از نظر قرینگی دارای تفاوت فاحشی با توزیع نرمال است.

نمره های استاندارد

نمره های استاندارد موقعیت فرد را در گروه معین می کنند. با داده های مقیاس حداقل فاصله ای کاربرد دارند. در تبدیل نمرات خام به نمره استاندارد از فرمول مقابل استفاده می کنیم:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

مثال: در امتحانی که میانگین آن ۳۸ و انحراف معیار آن ۳ باشد، کسی که نمره ۴۴ گرفته است دارای $Z=2$ می باشد.

$$Z = \frac{44 - 38}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$X = \bar{X} - Z \frac{s}{2}$$

در تبدیل نمره Z به دیگر نمرات استاندارد از فرمول مقابل استفاده می کنیم:

مثال: کسی که نمره او $Z=2$ باشد نمره t او برابر خواهد بود با:

$$t=2+5 \times 10=70$$

نمره های استاندارد	میانگین	انحراف استاندارد
Z	۰	۱
T	۵۰	۱۰
CEEB	۵۰۰	۱۰۰
نه گانه	۵	۲
هوش و کسلر	۱۰۰	۱۵
هوش بینه	۱۰۰	۱۶
AGCT ارتش آمریکا	۱۰۰	۲۰

سپس در تبدیل نمرات به نمرات استاندارد دیگر به روش زیر عمل می کنیم:

$$CEEB=500+Z100$$

$$t=50+Z10$$

$$100+Z15=\text{هوش و کسلر}$$

$$AGCT=100+20Z$$

$$100+16Z=\text{هوش بینه}$$

$$5+2Z=\text{نه گانه}$$

مثال:

۱-در آزمون CEEB فردی ۸۰۰ گرفته است، نمره Z او چقدر است؟

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{800 - 500}{100} = 3$$

۲-فردی که در یک آزمون نمره نه گانه او ۳ شده است، نمره Z او چقدر است؟

$$\text{Stanine} = 5 + 2z \rightarrow Z = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

۳-نمره IQ فردی ۱۴۰ شده است، نمره Z او چقدر است؟

$$Z = \frac{140 - 100}{15} = 2/7$$

۴-نمره t فردی ۳۰ شده است، نمره Z او چقدر است؟

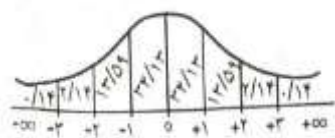
$$Z = \frac{30 - 50}{10} = -2$$

$$t=50+10z$$

۵-نمره Z فردی ۲ شده است نمره CEEB او چقدر است؟

$$X = \bar{X} + Z.S \rightarrow 500 + (2 \times 100) = 700$$

۶-نمره Z فردی ۱/۵ می باشد، نمره نه گانه او چقدر است؟



$$X = 5 + (1/5 \times 2) = 8$$

۷-نمره Z فردی ۲- است نمره AGCT او چقدر است؟

$$X = 100 + (-2) \times 20 = 60$$

۸-نمره Z فردی 1/5- شده است. نمره t او چقدر است؟

$$t = 50 + (-1/5) \times 10 = 35$$

۹-نمره CEEB فردی ۳۵۰ شده است نمره هوشبر او چقدر است؟

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{350 - 500}{100} = 1/5$$

$$X = \bar{X} + ZS \rightarrow 100 + (-1/5) \times 15 = 77/5$$

۱۰-نمره نه گانه فردی ۸ شده است، نمره t وی چقدر است؟

$$Z = \frac{8 - 5}{2} = 1/5$$

$$= 75 \times 10, t = 50 + 2/5$$

۱۱-نمره IQ فردی ۴۵ شده است نمره t او چقدر است؟

$$Z = \frac{45 - 100}{15} = -3/67$$

$$t = 50 + (-3/67) \times 10 = 13$$

منحنی طبیعی و سطوح زیر منحنی

منحنی طبیعی (زنگوله ای یا گوس) یک توزیع طبیعی است.

۱. شکل آن به میانگین و انحراف استاندارد بستگی دارد.

۲. میانگین آن صفر و انحراف استاندارد آن یک می باشد.

۳. در عمل یک منحنی طبیعی داریم و بالاترین ارتفاع در میانگین است.

۴. در منحنی طبیعی میانگین و میانه و نما با هم برابر هستند.

به طوریکه می بینیم مشخص می شود که 34/13 درصد افراد بین ۱+ تا \bar{X} قرار می گیرند. همین طور ۱۳/۵۹ درصد افراد بین ۲+ تا ۱+ قرار می گیرند و ۲/۱۴ درصد افراد بین ۳+ تا ۲+ و ۰/۱۴ درصد افراد بین ∞ تا ۳+ قرار می گیرند.

این درصدها برای طرف چپ منحنی به دلیل تقارن هم صادق است. اگر بخواهیم رتبه درصدی افراد را بر اساس منحنی نرمال محاسبه کنیم به روش زیر عمل می کنیم:

اگر داده (Z) یک عدد باشد توجه می کنیم مثبت است یا منفی، در صورت مثبت بودن با رتبه درصدی اولیه ۵۰ جمع می کنیم و اگر منفی بود از رتبه درصدی ۵۰ کم می شود.

$$50 + 34/13 \rightarrow 84/13 \text{ درصد}$$

رتبه درصدی $Z=1$ چقدر است؟

$$50 - 34/13 = 15/87$$

رتبه درصدی $Z=-1$ چقدر است؟

در صورتیکه سطوح بین دو نمره Z خواسته شود دیگر ۵۰ کاربردی ندارد و سطوح زیر منحنی محاسبه می شود.

$$34/13 + 34/13 = 68/26 \text{ درصد}$$

مثال: سطوح زیر منحنی بین ± 1 چقدر است؟

سطوح دیگر عبارتند از:

$$\bar{X} + 3 \rightarrow 49/86 \text{ درصد}$$

$$\bar{X} + 2 \rightarrow 47/72 \text{ درصد}$$

$$\bar{X} - 3 \rightarrow 49/86 \text{ درصد}$$

$$\bar{X} - 2 \rightarrow 47/72 \text{ درصد}$$

سطوح بین مثبت و منفی

$$-2 \text{ تا } +2 \rightarrow 95/44 \text{ درصد}$$

$$-3 \text{ تا } +3 \rightarrow 99/77 \text{ درصد}$$

$$+1 \text{ تا } -2 \rightarrow 81/85 \text{ درصد}$$

در صورتیکه به صورت اعشاری باشد با روش زیر عمل می کنیم:

رتبه درصدی $Z = 1/5$ چقدر است؟

$$50 + 34/13 + 13/59 \times \frac{5}{10} = 90/93$$

رتبه درصدی $Z = -2/5$ چقدر است؟

$$50 - \left[34/13 + 13/59 + 2/14 \times \frac{25}{100} \right] = 1/75$$

رتبه درصدی $Z = 1/02$ چقدر است؟

$$50 + 34/13 + 13/59 \times \frac{2}{100} = 84/40$$

سطوح زیر منحنی بین $Z = 1/75$ تا $Z = -1/5$ چقدر است؟

$$P_R = -1/5 \rightarrow \left[34/13 + 13/59 \times \frac{5}{10} \right] = 40/93$$

$$40/93 + 44/32 = 85/25 P_R = -1/75 \rightarrow \left[\frac{34}{13} + \frac{13}{59} \times \frac{75}{10} \right] = 44/32$$

نکات مهم

۱- انتقال از نمره های خام به نمره تراز Z شکل نمره را تغییر نمی دهد.

۲- اگر توزیع نمره های خام دارای کجی باشد، توزیع Z نیز دارای کجی است.

۳- برخلاف رتبه های درصدی اختلاف در نمره های Z اختلاف در نمره های خام را نشان می دهد.

۴-نسبت اختلاف نمره ها در توزیع اصلی یا نمره های خام، مساوی نسبت اختلاف بین نمره های Z آنها است. بنابراین فاصله بین اندازه نمره های اصلی در تبدیل به نمره های Z تغییر نمی کند.

۵-در نمره های نه گانه، ۹ فاصله یا واحد وجود دارد که هر فاصله یا واحد آن، مساوی نصف واحد انحراف معیار است. واحد میانی (پنجمین نمره نه گانه) نقطه میانی توزیع را نشان می دهد که دربرگیرنده ۲۰ درصد موارد است. چهارمین، سومین، دومین، و نخستین نمره نه گانه، از مرکز توزیع به سمت کرانه انتهایی پایین توزیع، به ترتیب ۱۷، ۱۲، ۴، ۷ درصد از موارد را دربرمی گیرد. (و برعکس) نمره ۹ گانه مانند رتبه درصدی نقطه ای بر روی مقیاس نیست، بلکه دربرگیرنده محدوده ی وسیعی از توزیع است. به همین دلیل نسبت به اختلاف های قابل توجه در طول مقیاس حساس نیست، اما نسبت به اختلاف های موجود در کرانه های انتهایی توزیع، به صورت گمراه کننده های حساس است.

۶-نمره های کلاسی مانند نمره های هوشی دارای توزیع بهنجار هستند. و بیشتر برای دوره ابتدایی که مطالب از پیوستگی بیشتری برخوردارند مناسب است.

همبستگی

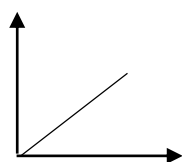
نکته شماره ۱۹

همبستگی بررسی رابطه بین دو متغیر با چند متغیر است، یعنی به دنبال این امر هستیم که آیا افزایش یا کاهش یک متغیر تأثیری روی متغیر دیگر دارد. فنون توصیفی در اینگونه مطالعات (که در آنها فقط ارتباط بین متغیرها، بدون آنکه هیچ یک از آنها دستکاری یا کنترل شود، مورد بررسی قرار میگیرد) عبارتست از میزان همخوانی (مانند ضریب فای یا ضرایب مشابه دیگر) برای مواردی که دو متغیر اندازه گیری شده طبقه ای باشد. ضریب رتبه ای اسپیرمن برای مواقعی که دو متغیر مورد اندازه گیری در مقیاس ترتیبی بیان می شوند، و سرانجام ضریب همبستگی پیرسون برای مواقعی که دو متغیر مورد بحث دارای مقیاس فاصله ای باشند. هر کدام از اینها نشان دهنده قدرت ارتباط بین دو متغیر است.

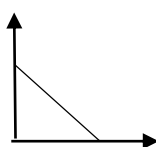
اگر هدف بررسی یک متغیر مثل X روی متغیر دیگر مثل Y باشد، بررسی همبستگی تک متغیری است. اصطلاحاً به پژوهش های تک متغیری موقعیت های مصنوعی گفته می شود. اگر هدف بررسی چند متغیر مثل X_1, X_2, \dots, X_n بر روی یک متغیر دیگر یعنی Y باشد، بررسی همبستگی چند متغیری است. اگر هدف بررسی چند متغیر X_1, X_2, \dots, X_n بر روی چند Y_1, \dots, Y_n باشد، همبستگی کانونی است. در این مطالعات متغیر مستقل را متغیر پیش بینی کننده و متغیر وابسته را متغیر پیش بینی شونده گویند.

جهت همبستگی و شدت همبستگی

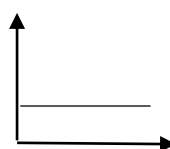
جهت همبستگی: اگر افزایش یک متغیر با افزایش متغیر دیگر همراه شود یا کاهش یک متغیر با کاهش متغیر دیگر همراه شود همبستگی مستقیم است. ولی اگر، افزایش یک متغیر با کاهش متغیر دیگر یا کاهش یک متغیر با افزایش متغیر دیگر همراه باشد، همبستگی منفی است. هنگامی که شیب پراکندگی (خط رگرسیون) افقی یا عمودی باشد، همبستگی صفر است.



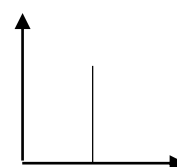
همبستگی مستقیم خطی کامل



همبستگی کامل منفی



همبستگی صفر



همبستگی صفر

شدت همبستگی: دامنه همبستگی بین ۱+ و ۱- یعنی همبستگی ۱- معکوس و کامل، همبستگی ۱+ مستقیم و کامل است. مقدار همبستگی صفر تا ۱ می باشد. هر داده ای بین این دو حد ناقص است. یعنی همبستگی ۰/۹۹ ناقص است. هرچه همبستگی به قدر مطلق ۱ نزدیکتر باشد شدت آن بیشتر است. مثال: همبستگی ۰/۹۰- از همبستگی ۰/۷۰+ شدت بیشتری دارد.

نکته: اگر ضریب همبستگی از ۰/۷۰ بالاتر باشد می گوئیم رابطه خطی است. اگر پایین تر باشد رابطه غیرخطی است و در صورت غیر خطی بودن رابطه بین دو متغیر از ضریب همبستگی ایتا η استفاده کنیم.

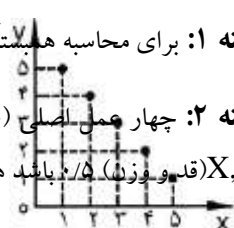
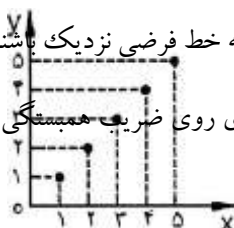
$$\eta = 1 - \frac{SS_{reg}}{SS_{reg}}$$

نام	X	Y
حسن	۵	۵
علی	۴	۴
احمد	۳	۳
مهدی	۲	۲
محمد	۱	۱

X	Y
5	1
4	2
3	3
2	4
1	5

نکته ۱: برای محاسبه همبستگی ابتدا باید نمودار پراکندگی را رسم کرد. اگر نقاط به خط فرضی نزدیک باشند، همبستگی زیاد است.

نکته ۲: چهار عمل اصلی (+، -، ×، ÷) یک نمره در کلیه نمرات یک توزیع هیچ تأثیری روی ضریب همبستگی ندارد. مثلاً اگر همبستگی بین X، Y (قد و وزن) ۰/۵ باشد همبستگی بین 2X و Y همان ۰/۵ خواهد بود



X	Y
150	112
165	108
175	103
180	101
192	99

X	Y
150	145
160	140
170	173
160	142
150	141

$$r_{xy} = -1$$

$$r_{xy} = -1$$

انواع ضریب همبستگی

الف) در حالتی که دو متغیر اسمی و یا یکی اسمی و دیگری رتبه ای باشند: ضرایب عبارتند از کرامر - توافق C - لاندا - تاو گودمن و کراسکال - همبستگی کرامر: (جدول از ۲×۲ بیشتر باشد و حداقل یکی از متغیرها چند ارزشی است). رابطه مقارن نیست. مانند بررسی این فرض: بین جنس دانشجویان و گرایشات سیاسی آنها رابطه وجود دارد. جنس اسمی و گرایشات سیاسی هم متغیر اسمی. (بی

طرف، تندرو، محافظه کار). معادله آن عبارتست از: $u = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(L-1)}}$ که n تعداد حجم نمونه و L تعداد ردیف یا ستون، هر کدام که تعداد کمتری دارند.

سیاسی جنسیت	گرایش	بیطرف	تندرو	محافظه کار	جمع
خانم ها	۳۲	۲۲	۵	۵۹	
آقایان	۵	۳۰	۱۰	۴۵	
جمع	۳۷	۵۲	۱۵	۱۰۴	

$$u = \sqrt{\frac{21.0982}{104(2-1)}} = 45$$

نکته: هنگامی که تعداد کمتر سطر یا ستون برابر ۲ باشد، فرمول بالا به علت این که مقدار L برابر با یک میشود، به صورت زیر که به همبستگی فی معروف است، تبدیل می شود.

$$\varphi = \sqrt{\frac{x^2}{n}}$$

-همبستگی c توافقی: (جدول از 2×2 بیشتر باشد و حداقل یکی از متغیرها چند ارزشی است). معادله آن عبارتست از:

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + n}}$$

-ضریب همبستگی لاندا: این ضریب تفسیر روشن تری از همبستگی می دهد. شما تا چه اندازه میتوانید از روی جنس افراد، گرایشات سیاسی آنها را پیش بینی کنید و یا برعکس. این ضریب امکان چنین پیش بینی را می دهد.

معادله آن عبارتست از: $Y = \frac{e_1 - e_2}{e_1}$. در این رابطه e_1 اشتباه گروه بندی در موقعیت اول و e_2 اشتباه گروه بندی در موقعیت دوم می باشد.

(ب) ضریب همبستگی در حالتی که هر دو متغیر دارای مقیاس رتبه ای باشند: عبارتند از گاما - تاو کندال b - تاو کندال c - ضریب d سامرز.

نکته: همه ی این ضرایب قرینه هستند. بدین معنا که با تغییر متغیر مستقل و وابسته در مقدار ضریب تغییری ایجاد نمی شود.

-ضریب گاما (G): رابطه ی بین دو متغیر دو مقوله ای ترتیبی را به دست می دهد. مانند رابطه ی سطح تحصیلات مادران با نگرش آنان نسبت به تحصیلات دختران.

-ضریب لامبدا (λ): رابطه ی بین دو متغیر نامتقارن است و رابطه ی ماقبل و مابعد را در یک توالی از رفتارها مطرح می کند. به ما می گوید متغیر a تا چه حد متغیر b را پیش بینی می کند. عکس آن ممکن نیست. مقدار آن بین صفر و یک است.

-ضریب کپا (K): اگر چند متغیر اسمی و رابطه متقارن باشد از این ضریب استفاده می شود. مثلاً اگر k داور N شیء را به m مقوله اسمی تبدیل کنند، آماره کپا میزان توافق داورها در مورد اینگونه طبقه بندی را نشان می دهد. مقدار آن بین صفر و یک است.

-ضریب هماهنگی (w) یا توافق کندال (u): در پژوهش هایی که در آنها بیش از دو مجموعه رتبه وجود دارد و مایلیم بدانیم که بین رتبه هایی که توسط m داور به n فرد داده شده تا چه حد توافق وجود دارد، از این دو شاخص استفاده می شود. وقتی داده ها به صورت زوج

های همتا و نه به صورت رتبه جمع آوری شده باشد، روش ضریب توافق کندال (u) مناسبتر است. مقدار W بین صفر و یک است مقدار u اگر k زوج باشد $(1 - \frac{1}{k})$ و اگر k فرد باشد $(\frac{1}{k})$ ، حداکثر برابر یک است.

$$\omega = \frac{SS_r}{\frac{1}{12}m^2(n^2 - n)}$$

m = تعداد داوران

n = تعداد افراد رتبه بندی شده

SS_r = واریانس مجموع رتبه ها

آزمون تقریبی معنادار بودن نیز با استفاده از مشخصه آماری زیر بدست می آید:

$$X_{ab}^2 = m(n - 1)\omega$$

نکته: هرگاه پژوهشگر بخواهد اثر متغیر سوم را ثابت نگهدارد و میزان رابطه ی دو متغیر دیگر را مشخص کند، از ضریب همبستگی رتبه ای تفکیکی کندال باید استفاده کند.

همبستگی گشتاوری پیرسون

زمانی استفاده می شود که:

۱- هر دو متغیر توزیع نرمال داشته باشند.

۲- پراکندگی نمرات در هر دو متغیر یکسان باشد.

۳- توزیع خطی باشد

۴- مقیاس متغیرها حداقل فاصله ای باشد (یا نسبی). مهمترین مفروضه این است که هر دو متغیر دارای حداقل مقیاس فاصله ای باشند. مثل: قد و وزن هوش و پیشرفت تحصیلی.

فرمول مهم:

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{cov}{S_x \cdot S_y} = \frac{Zx \cdot Zy}{n}$$

ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن

هنگامی که فقط دو دسته رتبه وجود داشته باشد (تعداد رتبه ها کم)، از ضریب اسپیرمن و یا تاو کندال می توان استفاده کرد. ضریب اسپیرمن از زوج های همتا استفاده می کند. زمانی کاربرد دارد که داده ها رتبه ای باشد. یکی از متغیرها یا هر دو متغیر و یا اینکه داده ها فاصله ای، ولی مفروضه های آمار پارامتریک رعایت نشده باشد. مثل: ترتیب تولد و رتبه در کلاس. وقتی رابطه غیرخطی باشد، داده های فاصله ای باید به رتبه تبدیل شوند. این ضریب برای رابطه های کاملاً غیر خطی مناسب نیست.

$$D = R_x - R_y r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

خلاقیات X	پیشرفت تحصیلی Y	R_x	R_y	D	D^2
120	18	2	3	-1	1
112	19	4	2	2	4
118	12	3	5	-2	4
125	17	1	4	-3	9
101	19/5	5	1	4	16
					$\sum D^2 = 34$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 34}{2} \rightarrow 1 - \frac{204}{120} = 1 - 1/7 \rightarrow 0/7$$

نکته: زمانی که اعداد تکرار می‌شوند، برای تعیین رتبه اعداد مشابه باید بشرح زیر عمل کرد:

X	Y	R_x	R_y	D	D^2
18	29	5	6	-1	1
19	42	3	2	1	1
17	35	7/5	4	3/5	12/25
18	35	5	4	1	1
25	28	1	7	-6	36
12	21	9	8	1	1
23	35	2	4	-2	4
11	66	10	1	9	81
18	11	5	10	-5	25
17	14	7/5	9	-1/5	2/25
					$\sum D^2 = 164/5$

$$\frac{3+4+5}{3} = 4$$

$$\frac{7+8}{2} = 7/5$$

$$\frac{4+5-6}{3} = 5 \text{ رتبه عدد تکراری}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 164/5}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{987}{990} = 0/003$$

نکته: اگر $n \leq 30$ از جدول استفاده کنید. اگر $n \geq 30$ از فرمول زیر مقدار بحرانی را بیابید. اگر بین مقادیر مثبت و منفی بود همبستگی وجود ندارد.

$$r_s = \frac{\pm z}{\sqrt{n-1}}$$

در مثال بالا اگر فرض کنیم افراد نمونه ۶۵ نفر هستند. بنابراین داریم:

نکته: اگر $r_s = \frac{\pm 1/96}{\sqrt{65-1}} = \pm 0/245$ اگر آماره آمازون $r_s = /40$ باشد، چون خارج از دامنه ی $\pm 0/245$ است فرض صفر رد می شود. یعنی بین رتبه ها همبستگی وجود دارد.

ضریب همبستگی دو رشته ای نقطه ای

زمانی مورد استفاده قرار می گیرد که یک متغیر پیوسته و دیگری دوارزشی واقعی باشد یا یک متغیر پیوسته و دیگری دوارزشی و فرض نرمال بودن توزیع رعایت نشده باشد. مثل: همبستگی بین نمره کل آزمون و یک سؤال یا جنسیت و نمره در یک آزمون که می تواند از یک کمتر باشد تابع p و q است. در حالت بیشینه مقدار آن از ۱ کمتر است. ($r=0/7978$)

۱- **ضریب همبستگی دو رشته ای:** یک متغیر پیوسته و دیگری دو ارزشی ساختگی است. می تواند از یک بیشتر باشد. توزیع نرمال و رابطه خطی است. منظور از ساختگی یعنی ما مثلاً نمرات ریاضی ۱۵-۱۵-۹-۸ را به صورت مردود - قبول طبقه بندی کنیم (۰ و ۱).

X	X'
۱۵	۱
۱۵	۱
۹	۰
۸	۰

۲- **ضریب همبستگی فی:** زمانی کاربرد دارد که هر دو متغیر دوارزشی واقعی باشند یا هر دو متغیر دوارزشی و فرض نرمال بودن رعایت نشده باشد و رابطه مقارن باشد. یعنی جای متغیرها عوض شود نتیجه تغییر نمی کند. مانند رابطه جنسیت و وضع سواد (بیسواد-باسواد) و یا همبستگی بین دو سؤال (در کتاب خانم سرمد برای این مورد تراکوریک پیشنهاد شده است، ص ۲۲۲) که البته بیشتر فی بکار می رود.

۳- **ضریب همبستگی تراکوریک:** زمانی کاربرد که یک یا هر دو متغیر دو ارزشی ساختگی باشند. یا هر دو متغیر دو ارزشی و فرض نرمال بودن رعایت شده باشد، مثل همبستگی بین پاسخ گروه قوی و ضعیف به سؤال ۱.

۴- **ضریب همبستگی کانونی:** هنگامی که بخواهیم رابطه بین دو یا چند متغیر را با دو یا چند متغیر دیگر بررسی کنیم، از این ضریب همبستگی استفاده میکنیم.

۵- **همبستگی تفکیکی (پاره ای):** ضریب همبستگی دو متغیری است. برای داده های ناپیوسته که اثر متغیر سوم و بعدی را می خواهیم روی هر دو متغیر حذف کنیم، بکار میرود.

$$r_{XY \cdot Z}$$

$$r_{XY \cdot ZF}$$

$$r_{XY \cdot Zfg}$$

مرتبه اول

مرتبه دوم

مرتبه سوم

رابطه پیشرفت تحصیلی و خلاقیت با حذف اثر هوش بر روی هر دو متغیر (تفکیکی مرتبه اول)

۶- **ضریب نیمه تفکیکی:** اثر متغیر سوم و بعدی را روی یکی از متغیرها حذف می کنیم:

$$r_{X(Y \cdot Z)}$$

$$r_{X(Y \cdot Zf)}$$

مرتبه اول

مرتبه دوم

نکته: تفسیر ضریب همبستگی نباید برحسب درصد و نسبت باشد. مثلاً $r_{xy} = 0/70$ هفتاد درصد رابطه بین متغیرها را تبیین نمی کند و $r_{xy} = 0/90$ دقیقاً دو برابر $r_{xy} = 0/45$ نیست.

خلاصه همبستگی ها

گشتاوری پیرسون	R	پیوسته	پیوسته	بائباترین روش است.
تفاوت رتبه ها (rho)	ρ	رتبه ای	رتبه ای	بیشتر به جای همبستگی گشتاوری به کار برده میشود، وقتی که تعداد موارد کمتر از ۳۰ است.
تای کندال	τ	رتبه ای	رتبه ای	زمانی که تعداد موارد ۱۰ کمتر است، به جای rho به کار برده می شود.
دو رشته ای	r_{bis}	دو ارزشی ساختگی	پیوسته	مقدار این همبستگی گاهی اوقات از ۱ بیشتر میشود و خطای استاندارد آن بزرگتر از ۱ است. از این روش در تجزیه و تحلیل سؤال استفاده می شود.
دو رشته ای گسترده	r_{wbis}	دو ارزشی ساختگی گسترده	پیوسته	زمانی به کار برده می شود که علاقمند به مطالعه افرادی هستید که در کرانه های انتهایی متغیر دو ارزشی قرار دارند.
دو رشته ای نقطه ای	r_{pbis}	دو ارزشی واقعی	پیوسته	ضریب همبستگی حاصل در این روش کوچکتر از ۱ و بسیار کوچکتر از r_{pbis} است.
چهارخانه ای (تراکوریک)	r_t	دو ارزشی ساختگی	دو ارزشی ساختگی	زمانی به کار برده می شود که هر دو متغیر را بتوان در نقطه‌ی بحرانی معینی به دو قسمت تقسیم کرد.
ضریب فی	ϕ	دو ارزشی واقعی	دو ارزشی واقعی	برای محاسبه همبستگی درونی بین سؤال ها در آزمونه‌ای چندگزینه ای یا دوگزینه ای به کار برده می شود.
ضریب توافقی	c	دو یا چند طبقه ای	دو یا چند طبقه ای	در برخی شرایط معین، با r_t قابل مقایسه است.
شاخص رابطه نامتقارن سامرز	d	هر دو متغیر دو مقوله ای یا رتبه ای		اینکه کدام متغیر مستقل یا وابسته نامگذاری میشود در نوع محاسبه‌ی شاخص تأثیر دارد.

نکته

- ۱- **متغیر پیوسته:** به متغیری گفته می شود که پیوستار زیربنایی آن تمایل به توزیع طبیعی یا بهنجار دارد. نمونه هایی از این متغیر عبارتند از: وزن، توانایی یا پیشرفت تحصیلی که به وسیله آزمون های استاندارد اندازه گیری می شوند.
- ۲- **متغیر دوارزشی ساختگی:** وقتی حاصل می شود که یک متغیر پیوسته بر اساس یک معیار قراردادی که غالباً نزدیک مرکز داده هاست، به دو گروه تقسیم شود. به عنوان مثال، تقسیم بندی دانش آموزان به موفق - ناموفق، بالای متوسط، پایین متوسط، قبول - رد، و صمیمی - بی تفاوت در یک مقیاس نگرش سنج.
- ۳- متغیر دوارزشی واقعی: نقطه برش نسبتاً روشنی دارد (البته، نه ضرورتاً مطلق) به طوری که سرانجام داده های این متغیر به دو گروه تقسیم می شوند. نمونه هایی از این متغیر عبارتند از: مذکر - مؤنث، مرده - زنده، معلم غیر معلم، مردود - نامردود، و سیگاری - غیرسیگاری. متغیرهای دیگری وجود دارند که برای محاسبه همبستگی، میتوان آنها را دوارزشی واقعی تلقی کرد. نظیر کور رنگی - غیر کور رنگی، الکلی - غیر الکلی و پاسخ های صحیح - غلط یک سؤال معین در یک آزمون. توزیع های زیربنایی دوارزشی های واقعی اگر دارای تفاوت های مطلق نباشند، دونمایی و یا به طور نسبی ناپیوسته هستند.

کوواریانس (واریانس مشترک)

کوواریانس تغییرپذیری مشترک بین دو متغیر را گویند (واریانس یک متغیر). مقدار و جهت رابطه بین دو متغیر را اندازه می گیرد. ولی دو محدودیت دارد. مقدار کوواریانس به مقدار تغییرپذیری نمره های X و Y بستگی دارد. اگر پراکندگی زیاد کوواریانس نیز زیاد باشد، در نتیجه نمی توان کوواریانس اندازه های مختلف را با هم مقایسه کرد. تفاوت در مقدار کوواریانس ممکن است در اثر رابطه بین متغیرها، تفاوت در انحراف معیارها و یا تفاوت در رابطه و انحراف معیارها باشد. شاخصی که از تفاوت در اندازه مقیاس ها تأثیر نپذیرد همبستگی است. این عمل تصحیح از رابطه الف بدست می آید.

$$\text{Con} = \frac{\sum(xy)}{n-1} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n-1}$$

فرمول محاسبه

پرسش: اگر کوواریانس X و Y صفر باشد، کدام عبارت درباره X و Y صحیح است؟

الف) رابطه ای وجود ندارد. ب) رابطه ای غیر خطی وجود دارد.

ج) دو متغیر مستقل هستند. د) یا رابطه غیر خطی با استقلال وجود دارد.

پاسخ: گزینه (د) صحیح است. اگر کوواریانس صفر شد، نمی توان حکم به استقلال دو متغیر داد، چون ممکن است بین آنها رابطه ای غیرخطی وجود داشته باشد که بوسیله کوواریانس مشخص نمی شود. چون کوواریانس فقط نوع رابطه خطی دو متغیر را تعیین می کند.

مثال ۱: اگر COV برابر ۵۵ و $S_y^2 = 64$ باشد، همبستگی بین X, Y چقدر است؟

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}}{S_x \cdot S_y} = \frac{55}{8 \times 9} = \frac{55}{72} = +0.76$$

مثال ۲: اگر $\sum(X - \bar{X}) = 5$ و $\sum(Y - \bar{Y}) = 8$ باشد و انحراف معیار X برابر ۱۰ و انحراف معیار Y برابر ۱۶ باشد، ضریب همبستگی چقدر است؟

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{5 \times 8}{10 \times 16} = \frac{40}{160} = +0.25$$

مثال ۳: اگر $Z_X = 2$ و $Z_Y = 3/5$ باشد و حجم نمونه برابر ۴۰ نفر، ضریب همبستگی چقدر است؟

$$r_{xy} = \frac{Z_X \cdot Z_Y}{n} = \frac{2 \times 3/5}{40} = \frac{7}{40} = +0.175$$

مثال ۴: چنانچه میانگین وزن دانش آموزان ($n=10$) برابر ۵۰ و میانگین قد همین گروه ۱۱۰ cm باشد و فردی قد ۱۱۵ cm و وزن ۵۸ kg داشته باشد، میزان همبستگی بین قد و وزن او چقدر است؟

$$S_1 = 5 \text{ وزن و } S_2 = 3 \text{ قد}$$

$$\text{وزن } Z_X = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{58 - 50}{5} = 1/6$$

$$\text{قد } Z_Y = \frac{Y - \bar{Y}}{S} = \frac{115 - 110}{3} = 1/67$$

$$r_{xy} = \frac{Z_X \cdot Z_Y}{n} = \frac{1/6 \times 1/67}{10} = +0.27$$

$$V = r_{xy}^2 \times 100$$

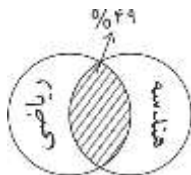
ضریب تعیین (درصد واریانس مشترک)

ضریب تعیین نشان دهنده میزان تأثیری است که متغیر X (مستقل) در متغیر Y (وابسته) ایجاد می کند یا به عبارتی با محاسبه این ضریب می توان تعیین کرد چند درصد از کل واریانس X ناشی از واریانس Y است.

$$r_{xy}^2 = \frac{cov^2}{S_x^2 \cdot S_y^2} = \frac{\text{واریانس مشترک}}{\text{کل واریانس}}$$

نکته: ضریب تعیین هیچ وقت منفی نخواهد شد، زیرا برای محاسبه آن ضریب همبستگی مجذور می شود.

سؤال: اگر همبستگی بین نمره ریاضی و نمره هندسه ۰/۷ باشد، درصد واریانس را بدست آورده و با شکل نشان دهید.



۵۱٪ = عوامل دیگر

$$V = (0.7)^2 \times 100 = 49$$

عواملی که بر ضریب همبستگی تأثیر می گذارند:

۱. اساس رابطه از جامعه ای به جامعه دیگر فرق می کند. مثلاً در افراد بشر در سنین ۱۶-۱۰ سالگی بین سن تقویمی و توانایی فیزیولوژیکی همبستگی بالایی وجود دارد. ولی بین این دو متغیر در سنین ۲۶-۲۰ سالگی همبستگی وجود ندارد.
۲. پراکندگی متغیرها در جوامع مختلف متفاوت است. بدین معنی که هرچه تجانس بیشتر باشد (واریانس کمتر باشد)، همبستگی کمتر است. به عنوان مثال، در یک پژوهش اگر همه باهوش باشند، دامنه محدود و مقدار r کاهش می یابد.
۳. همبستگی بین دو متغیر تحت تأثیر همبستگی آنها با متغیر سوم قرار دارد. به عنوان مثال، همبستگی بین فیزیک و ریاضی ممکن است به دلیل همبستگی این متغیرها با هوش باشد.
۴. استفاده از گروه های انتهایی ضریب همبستگی را زیاد می کند. نمره های انتهایی در حجم های کوچک بر همبستگی تأثیر زیاد می گذارد.
۵. اگر n افزایش یابد، احتمال معناداری r بیشتر است.
۶. وقتی متغیرها نامرتب باشند، r کاهش می یابد.
۷. رابطه غیر خطی امکان دارد مقدار ضریب همبستگی پیرسون را به صفر نزدیک کند.

۸. محدودیت در دامنه تغییرات ضریب همبستگی را کاهش می دهد. برای وجود محدودیت در دامنه تغییر باید واریانسها یا انحراف معیارهای متغیرهایی که ضریب همبستگی آنها محاسبه می گردد مورد بررسی قرار گیرند. کوچک بودن واریانس ها می تواند نشانه محدودیت در دامنه تغییر باشد.
۹. اگر واریانس کوچک باشد، تفسیر ضریب همبستگی باید با احتیاط لازم صورت گیرد .
- نکته ۱:** آزمون معناداری برای همبستگی در دو متغیر مستقل آزمون t فریدلی است و اگر گروهها مستقل است آزمون Z فیشر و اگر ضریب همبستگی را در دو گروه وابسته مقایسه کنیم t استیودنت است.
- نکته ۲:** درجه آزادی همبستگی برابر است با: $d.f = n - 2$

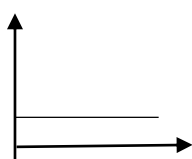
تحلیل همبستگی از نوع پیش بینی: رگرسیون و پیش بینی

زمانی که بین دو متغیر همبستگی وجود داشته باشد، میتوان از طریق رگرسیون مقدار یک متغیر (Y) را از روی یک متغیر دیگر (X) پیش بینی یا برآورد کرد، و هرچه همبستگی بین متغیرها بالاتر باشد، به همان اندازه پیش بینی دقیقتر است. (معدل نمره دروس دانشگاهی را از روی نمره آزمون استعداد پیش بینی می کنیم) این پیش بینی از روی خط رگرسیون بدست می آید. این خط بهترین برازش از میان مجموعه نقاط نمودار پراکندگی است. راه دیگر که به داوری ذهنی بستگی ندارد، اصل کمترین مجذورات است که مجذور انحراف ها حول خط رگرسیون را کمینه میسازد. میتوان معادله این خط را بدست آورد و سپس نمودار آن را رسم کرد. خط رگرسیون درحقیقت یک میانگین متحرک یا خط کمترین مجذورات است. رگرسیون درحقیقت معادله خط است. $Y = a + bx$

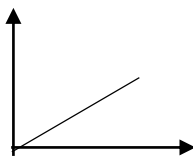
نکته: رابطه بین متغیر پیش بینی شونده (ملاک) (Y) و متغیر پیش بینی کننده (X) تابع علامت و شدت ضریب همبستگی است. اگر $r_{xy} = 1$ باشد، رگرسیون صفر و اگر $r_{xy} = 0$ باشد، همبستگی کامل است.

پیش بینی Y از روی X

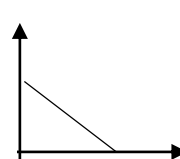
شیوه شهودی: که از طریق ترسیم نمودار ممکن است. تعبیر و تفسیر آن تابع فرد مشاهده گر است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل الف) چون خط افقی است، ارتفاع شیب آن صفر است. در این حالت پیش بینی دقیق امکان پذیر است. این شکل دو عامل مهم در پیش بینی را دارد:

۱- میانگین متغیر Y یعنی \bar{Y} و شیب خط فرضی در نمودار پراکندگی. ۲- این نمودار نشان می دهد اگر شیب خط (ضریب زاویه) صفر باشد، برای هر مقدار از \bar{X} نمره Y برابر است با میانگین نمره های Y .

شکل ب) بین X و Y رابطه مثبت و کامل وجود دارد. اگر X افزایش یابد مقدار Y به همان میزان افزایش می یابد.

شکل ج) بین X و Y رابطه منفی و کامل وجود دارد. اگر X افزایش یابد مقدار Y به همان میزان کاهش می یابد.

$$\text{شیب و ضریب زاویه} = \frac{\text{تغییر در } Y}{\text{تغییر در } X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

برای پیش بینی بطور کل باید اطلاعات زیر را داشته باشیم :

الف) میانگین نمره های متغیر Y

ب) شیب خط فرضی که نمودار پراکندگی را توصیف می کند.

ج) موقعیت نسبی فرد در متغیر X (نمره مفروض). این مقدار باید به میانگین نمره های Y اضافه یا از آن کسر گردد.

$$Y = \bar{Y} + \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - \bar{X})$$

پیش بینی با استفاده از معادله رگرسیون خطی

$$Y = a + bx$$

a = عرض از مبدأ (مقدار Y وقتی X صفر است).

$$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{شیب خط (مقدار متغیر در } Y \text{ به ازای یک واحد تغییر در } X)$$

از این معادله هنگامی استفاده می شود که همه نقاط یک توزیع مشترک روی یک خط مستقیم قرار می گیرند.

پیش بینی نمره های استاندارد (Z)

مقدماتی ترین روشی که در استفاده از ضریب همبستگی پیروان برای پیش بینی به کار برده می شود نمره های استاندارد است.

$$z_y = (z_x)(r_{xy})$$

مهم: اگر همبستگی کامل (۱) باشد، نمره استاندارد پیش بینی نیز کامل، در غیر این صورت غیر کامل می باشد. به عنوان مثال اگر نمره استاندارد Z برابر ۲ و همبستگی کامل (۱) باشد، نمره پیش بینی استاندارد نیز ۲ می باشد.

مهم: هنگامی که همبستگی بین دو متغیر کم باشد، نمره استاندارد Y که پیش بینی می کنیم، نزدیک به میانگین خواهد بود.

نکته ۱: زمانی که همبستگی بین دو متغیر پایین باشد نمرات پیش بینی شده نزدیک به میانگین نمره پیش بینی شونده هستند تا نمره واقعی. به این پدیده رگرسیون می گویند.

نکته ۲: میزان همبستگی بین دو متغیر حدود یا مقدار اتفاق رگرسیون را تعیین می کند.

نکته ۳: پدیده رگرسیون اولین بار بوسیله گالتن مورد استفاده قرار گرفت. بر اساس مطالعات گالتن، فرزندان والدین بلند قد، بلند قد هستند اما نه به اندازه والدین خود. به همین ترتیب فرزندان والدین کوتاه قد، کوتاه قد هستند اما نه به کوتاهی والدین خود.

نکته ۴: خط رگرسیون، خطی است که خطاهای پیش بینی را به حداقل می رساند (خط حداقل مجذورها). یعنی اینکه مجموع مجذور فاصله Y ها از خط رگرسیون کوچکتر از فاصله هر خط دیگری تا محور Y ها می باشد. خط رگرسیون را خط برازش نیز می نامند.

نکته ۵: اختلاف بین نمره واقعی (Y) و نمره پیش بینی شده (y') را خطای پیش بینی e می گویند.

$$e = y - y'$$

نکات بسیار مهم

۱. رگرسیون زمانی اتفاق می افتد که همبستگی کامل نباشد. یعنی نمرات از گروه های بالا و پایین جامعه انتخاب شده باشند (کرانه بالا و پایین)
۲. اگر همبستگی صفر باشد، رگرسیون کامل و اگر یک باشد رگرسیون صفر است.
۳. بین شدت همبستگی و رگرسیون همبستگی معکوس وجود دارد.
۴. انحراف نمره از خط رگرسیون از انحراف نمره از هر خط دیگری کوچکتر است.
۵. چنانچه پراکندگی نقاط در اطراف خط رگرسیون به شکل بیضی باشد، همبستگی بین دو متغیر در حد متوسط و مقدار آن نزدیک به ۰/۵ است.

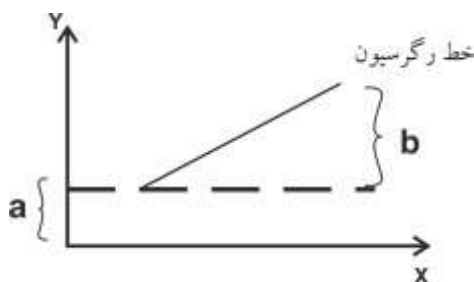
معادله خط رگرسیون

برای پیش بینی یک متغیر از روی متغیر دیگر از معادله خط رگرسیون استفاده می شود: $Y' = a + bx$ که در آن b : شیب خط

$Y' =$ متغیری که می خواهیم پیش بینی کنیم

a = محل تلاقی خط رگرسیون با محور عرض ها یا عرض از مبدأ X = متغیری که مقدار آن را در اختیار داریم

نکته: بعضی مواقع مقدار a و b در اختیار است. در این صورت با جایگزینی مقادیر، محاسبه خیلی ساده می باشد.



مثال:

$Y=0$	$Y=4+2(0)=4$
$X=1$	$Y=4+2(1)=6$
$X=4$	$Y=4+2(4)=12$
$X=8$	$Y=4+2(8)=20$

روش محاسبه ضرایب a و b :

$$b_{YX} = \frac{cov_{XY}}{S_x^2}$$

$$b_{yx} = r_{xy} \frac{S_y}{S_x}$$

$$b_{xy} = r_{xy} \frac{S_x}{S_y}$$

انحراف استاندارد $S_y = y$	شیب خط رگرسیون b_{yx} و B_{xy}
انحراف استاندارد $S_x = x$	ضریب همبستگی r_{xy}

محاسبه a و b از روی داده های خام

$$b_{yx} = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad a_{yx} = \frac{\sum Y - b_{yx} \sum X}{N}$$

مثال: برای داده های زیر معادله خط رگرسیون را به دست آورید؟

X	Y	X^2	Y^2	XY
۶	۸	۳۶	۶۴	۴۸
۹	۹	۸۱	۸۱	۸۱
۵	۷	۲۵	۴۹	۳۵
۲۰	۲۴	۱۴۲	۱۹۴	۱۶۴

$$b_{xy} = \frac{3(164) - (20)(24)}{3(142) - (20)^2} = 0/46$$

$$a_y = \frac{24 - (0/46)(20)}{3} = 4/93$$

$$Y = 4/93 + 0/46(X)$$

خطای استاندارد برآورد

اکثر مواقع بین نمرات پیش بینی شده و نمرات مشاهده تفاوت وجود دارد. به این حالت، اختلاف خطای استاندارد برآورد می گویند.

نکته: هرچه همبستگی بین متغیرها بیشتر باشد، خطای پیش بینی کمتر خواهد بود. این خطا به دو روش محاسبه می شود.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum e^2}{N}} \quad \text{یا} \quad S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{N-2}}$$

$$S_{yx} = S_y \sqrt{1 - r^2_{xy}} \quad \text{خطای استاندارد پیش بینی}$$

$$e = \text{خطای پیش بینی} \quad r_{xy} = \text{ضریب همبستگی}$$

نکته: $N-2$ را درجه آزادی خطای استاندارد پیش بینی گویند.

رابطه پایایی و خطا

$$S_E = S \sqrt{1 - r_{xx}}$$

همانطور که ملاحظه می شود r_{xx} ضریب اعتبار (پایایی) است.

نکته ۱: اگر همبستگی کامل باشد خطا صفر است. یعنی همبستگی با خطا رابطه عکس دارند

نکته ۲: انحراف معیار نمونه و خطای پیش بینی رابطه مستقیم دارند (به فرمول ها توجه کنید)

نکته ۳: بین خطای اندازه گیری و ضریب پایایی رابطه عکس وجود دارد.

انواع رگرسیون

تک متغیری: از روی یک متغیر، متغیر دیگر را پیش بینی میکنیم. از روی هوش، خلاقیت فرد را پیش بینی میکنیم.

چندگانه: از روی چند متغیر، یک متغیر پیش بینی می شود. از روی اعتماد به نفس و اضطراب و خلاقیت، پیشرفت تحصیلی پیش بینی می شود.

چند متغیری: چند متغیر مستقل، چند متغیر وابسته را پیش بینی می کنند.

نکته ۱: وقتی همبستگی چند متغیر X را با چند متغیر Y محاسبه می کنیم، همبستگی کانونی یا قانونی گفته می شود.

نکته ۲: مقدار همبستگی چند گانه معمولاً از همبستگی بین هریک از متغیرهای پیش بین و ملاک بیشتر است.

راهبردهای تحلیلی در انتخاب متغیرهای مستقل برای تشکیل معادله‌ی رگرسیون

۱. **راهبرد همزمان:** همزمان همه ی متغیرهای مستقل با هم وارد تحلیل می شوند.
۲. **رگرسیون گام به گام:** در این روش نحوه ی ورود متغیرها به تحلیل در اختیار محقق نیست. از روش گام به گام برای پیش بینی متغیر وابسته استفاده می شود. از این روش برای تبیین استفاده نمیشود.
۳. **رگرسیون سلسله مراتبی:** ترتیب ورود متغیرها با توجه به چارچوب نظری و توسط محقق مشخص شده است. چنانچه پژوهشگر بخواهد در پیش بینی پیشرفت تحصیلی از متغیرهای خلاقیت و هوش استفاده کند، میتواند با استفاده از این روش و با توجه به این که هوش بر خلاقیت تقدم دارد، عمل کند .

نکته ۱: برای پی بردن به معنادار بودن آماره های محاسبه شده از آزمون های آماری زیر استفاده میشود: آزمون معنادار بودن R^2 و ΔR^2 که از توزیع F پیروری می کند و آزمون معناداری ضرایب رگرسیون که از توزیع T پیروی میکند.

نکته ۲: در رابطه با ضرایب استاندارد نشده b و استاندارد شده β باید توجه داشت، هرگاه بخواهید اثر متغیرهای متفاوت را در یک جامعه ی واحد مقایسه کنید از β و هرگاه خواسته باشید اثر متغیرهای خاصی را در جوامع متفاوت مقایسه کنید از b استفاده نمایید.

روش های دیگر تحلیل رگرسیون

۱- آزمون X^2 نسبت درست نمایی (آزمون G^2)

این آزمون مانند X^2 معمولی برای داده های 2×2 به کار می رود. اما به دلایل زیر بر آزمون X^2 معمولی برتری دارد:

- کمتر تحت تأثیر حجم نمونه قرار می گیرد.
- قابل افزاز به مؤلفه هایی است که مانند مجموع مجذورات در تحلیل واریانس جمع پذیرند.
- در مدل لگاریم خطی که در آن با جداول چند بعدی سروکار داریم مورد استفاده قرار می گیرد.

۲- تحلیل ممیز

در مواردی استفاده می شود که متغیر وابسته اسمی و متغیرهای مستقل کمی باشند. در تحلیل ممیز باید گروه ها ناهمپوش و عضویت آزمودنی ها در آنها مشخص گردد .

برای مثال فرض می کنیم دانشگاهی می خواهد موفقیت یا شکست متقاضیان ورود به دوره ی دکترای رشته ی خاصی را پیش بینی کند. این دانشگاه با داشتن ویژگیهای داوطلبان سال قبل مانند پیشرفت تحصیلی، توصیه نامه ها و نمرات امتحانات ورودی که به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته می شود، با تحلیل ممیز میتواند به پیش بینی دست بزند.

۳- رگرسیون لجستیک

در مدل تحلیل ممیز همه ی متغیرهای پیش بین با مقیاس کمی (فاصله ای یا نسبی) اندازه گیری شده و متغیر ملاک (وابسته) مقوله ای است. در صورتی که متغیرهای پیش بینی هم در مقیاس کمی و هم در مقیاس مقوله‌ای اندازه گیری شده باشند، از تحلیل ممیز نمی‌توان استفاده کرد. در این موارد از رگرسیون لجستیک استفاده می‌شود، که متغیر متغیر وابسته مقوله ای و دو سطحی است. این دو مقوله معمولاً به عضویت یا عدم عضویت در یک گروه یا بلی و خیر اشاره دارد. در معادله ی رگرسیون معمولی از تعدادی متغیرهای پیش بین با ضرایبی (وزن‌ها) برای پیش‌بینی متغیر وابسته استفاده می‌شود. در رگرسیون لجستیک آنچه که پیش بینی می‌شود یک احتمال است که ارزش آن بین ۱۰ و تغییر می‌کند. در این رگرسیون از مفهوم بخت استفاده می‌شود که عبارتست از نسبت احتمال وقوع یک پدیده بر احتمال عدم وقوع آن. است که لگاریتم طبیعی بخت می‌باشد.

نکته ۱: واژه ی کلیدی در رگرسیون لجستیک سازه ای به نام لوجیت است که لگاریتم طبیعی بخت می‌باشد.

مثال: فرض کنید پژوهشگری می‌خواهد کمک کردن یا نکردن افراد را به دیگری برحسب احساس همدردی، احساس توانایی و قومیت فرد، پیش‌بینی کند. در این مثال احساس همدردی و توانایی در مقیاس فاصله ای و قومیت اسمی می‌باشد.

۴- مدل لگاریتم خطی

در مواردی که تمام متغیرهای مدل در مقیاس اسمی اندازه گیری شده و داده‌ها به صورت فراوانی باشد، روش معمولی برای پی بردن به رابطه ی بین دو متغیر مقوله ای استفاده از آزمون X^2 است. هرگاه تعداد متغیرهای مقوله ای بیش از دو باشد، تفسیر جداول X^2 مشکل یا غیر ممکن می‌شود. در چنین مواردی می‌توان از مدل لگاریتم خطی استفاده کرد. که اساس آن شبیه روش رگرسیون چندگانه است. با این تفاوت که در این روش متغیر مستقل، متغیرهای مقوله ای و اثر متقابل آنها، و متغیر وابسته لگاریتم طبیعی فراوانی های خانه ای است. مثال: اثر جنس، قومیت، سطح درآمد و اثرهای متقابل آنها بر فراوانی های یک جدول توافقی.

نکته: همانند تحلیل واریانس اثرهای متقابل نامگذاری می‌شوند. به عنوان مثال در سه عاملی اثر متقابل (مرتبه سوم) نامیده میشود. مدلی هایی که تمامی اثرات ممکن را دربرداشته باشد، مدل اشباع شده نامیده می‌شود. که مثال بالا این چنین است. چون ساده نیست مطلوب ترین روش محسوب نمی‌شود. تحلیل مدل لگاریتم خطی به دو صورت سلسله مراتبی و غیر سلسله مراتبی است.

نکته: تفاوت عمده مدل لگاریتم خطی با مدل رگرسیون لجستیک که مدل لوجیت نیز نامیده می‌شود، این است که در مدل لوجیت یک متغیر مقوله ای دو سطحی به عنوان متغیر وابسته وجود دارد. درحالی‌که در لگاریتم خطی متغیر وابسته، فراوانی های خانه ها است.

تحلیل پرویت و لوجیت

برای پاسخگویی به پرسش هایی از قبیل: چند ساعت مطالعه در هفته برای بدست آوردن نمره ای معادل ۸۰۰ در یک آزمون مانند تافل لازم است؟ که در چنین پرسش هایی متغیر تأثیرگذار که در یک مقیاس پیوسته اندازه گیری می‌شود (ساعات مطالعه) و یک متغیر برون داد (وابسته) که مقوله ای است و موفقیت یا شکست را اندازه گیری می‌کند، از این تحلیل ها استفاده می‌شود. این شیوه ها برای تبدیل داده های خام به داده های استاندارد بکار میروند. مقدار هر دوی آنها بین ۰/۲ و ۰/۸ تغییر کرده و مانند Z عمل می‌کند. برای تبدیل به پرویت، نمره ی Z را با ۵ جمع می‌کنیم. برای تبدیل به لوجیت از فرمول زیر استفاده می‌شود.

$$\text{نمره لوجیت} = \frac{\ln \frac{P}{(P-1)}}{2} + 5$$

$\ln =$ لگاریتم طبیعی و $p =$ نسبت پیامدهای موفقیت آمیز

مثال: اگر ۱۵۰ دانشجو ۳۰ ساعت در هفته مطالعه ی زبان انگلیسی کرده باشند و ۱۱۱ نفر از آنها توانسته باشند نمرهای بالاتر از ۱۲۰۰ به

دست آورند، نسبت موفقیت برابر است با: $\frac{111}{150} = 0/74$

نمره ی Z متناظر با آن (۷۴٪ درصد) در توزیع نرمال برابر ۰/۶۴ است. از این رو پروبیت این پیامد برابر است با: $0/64 = 5/64$. لوجیت این پیامد نیز عبارتست از:

$$\text{لوجیت} = \ln \frac{0/74(1 - 0/74)}{2} + 5 = 5/52$$

تحلیل عاملی

برای بررسی روایی سازه از روش آماری تحلیل عاملی استفاده می شود که با تشکیل ماتریس همبستگی سازه ی موردنظر بررسی میشود. برای انجام تحلیل عاملی ابتدا باید اطلاعات موجود در ماتریس معنادار باشد. برای این منظور از آزمون X^2 بارتلت استفاده میشود. معنادار بودن X^2 و آزمون بارتلت حداقل شرط لازم برای انجام محاسبات تحلیل عاملی است. در آزمون بارتلت فرض صفر این است که متغیرها فقط با خودشان همبستگی دارند. رد فرض صفر به این معنا است که ماتریس حاوی اطلاعات معناداری است. این آزمون را آزمون کرویت گویند.

احتمالات

نکته شماره ۲۰

احتمال یک نسبت است که صورت آن تعداد دفعاتی است که پیشامد رخ داده و مخرجش کل کوشش ها است.

$$P = \frac{f}{N}$$

مثال: همیشه تعداد تولد پسرها بیشتر از دخترها است. در یک گروه معمولی ۲۰۵ نوزاد به دنیا آمده است. از بین این نوزادان ۱۰۵ نفر پسر هستند. اگر یک نوزاد به طور اتفاقی از بین این گروه انتخاب شود، احتمال اینکه این نوزاد پسر نباشد چقدر است؟

چون از ۲۰۵ نوزاد ۱۰۵ نفر پسر هستند پس ۱۰۰ نوزاد دخترند. نتیجه در: $p_c = \frac{100}{205} = 0/488$

نکته: احتمال یک پیشامد غیر ممکن صفر است. احتمال رخ دادن یک پیشامد مسلم یک است.

فضای نمونه: از تمام پیشامدهای ساده تشکیل می شود. یعنی فضای نمونه از تمامی پیشامدهایی تشکیل می شود که دیگر نمی توان آنها را به مؤلفه های ساده تر تبدیل کرد .

متمم رویداد A: شامل تمام پیشامدهایی می شود که در آنها پیشامد A اتفاق نمی افتد.

نکته: وقتی مقدار احتمال را بیان می کنیم باید یا باید عدد دقیق اعشاری را بیان کنیم یا اینکه عدد را تا ۳ رقم معنادار گرد کنیم. اگر عدد کسر ساده مانند $\frac{2}{3}$ است لازم نیست گرد شود.

پیشامد مرکب: به پیشامدی گفته می شود که دارای ۲ یا بیشتر پیشامد ساده باشد.

$$S = P^n$$

فرمول فضای نمونه کل حالت‌های ممکن:

محاسبه احتمال

در احتمال محاسبات بر اساس دو قانون جمع و ضرب انجام می‌شود. قانون جمع زمانی به کار می‌رود که یکی از دو حادثه اتفاق بیفتد، در صورتیکه قانون ضرب در شرایطی به کار برده می‌شود که هر دو حادثه با هم اتفاق بیفتند.

دو رویداد ناسازگار: به حوادثی گفته می‌شود که وقوع یکی از آنها مانع وقوع دیگری باشد. برای مثال در پرتاب سکه، نشستن یک روی سکه مانع نشستن طرف دیگر می‌شود. در این صورت احتمال اینکه یکی از دو رویداد اتفاق بیفتد مساوی است با مجموع احتمال هریک از آنها.

$$p_{(A \text{ or } B)} = p_A + p_B \rightarrow p_{(A \cap B)} = 0$$

دو رویداد سازگار: هنگامی که دو رویداد سازگارند امکان وقوع آنها به صورت همزمان وجود دارد.

$$p_{(A \text{ or } B)} = p_A + p_B - p_{(A \cap B)}$$

مثال: اگر از یک دسته ورق دو کارت بکشیم، احتمال آمدن ۱۰ تا دل چقدر است؟

$$p_{(A \text{ or } B)} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

قاعده ی ضرب احتمال ها

رویدادهای مستقل: در ضرب، هر دو رویداد با هم اتفاق می‌افتد. به هم این و هم آن معرف است. در این صورت دو حالت وجود دارد. یا رویدادها مستقلند یا وابسته:

- **ضرب رویدادهای مستقل:** به رویدادهایی مستقل گویند که وقوع یا عدم وقوع هریک در احتمال وقوع یا عدم وقوع حادثه ی دیگر تأثیر نداشته باشد. برای مثال تولد فرزندان و یا احتمال آمدن عدد ۵ در انداختن دو تاس سبز و آبی.

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- **ضرب رویدادهای وابسته:** اگر دو رویداد وابسته باشند، یعنی احتمال وقوع یکی از آنها به احتمال وقوع دیگری وابسته باشد، احتمال آن که هر دو اتفاق بیفتند عبارتست از:

$$P_{(A,B)} = P_A \times P_{B/A} = P_A \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال: در یک کیسه ۱۸ مهره وجود دارد که ۶ مهره مشکی و ۱۲ مهره سفید است. احتمال اینکه اگر دو مهره خارج کنیم هر دو سفید باشد، چقدر است؟ (بدون جایگزینی)

$$P_A = \frac{12}{18} \rightarrow P_B = \frac{11}{17} \rightarrow P = \frac{12}{18} \times \frac{11}{17} = \frac{132}{306}$$

فاکتوریل: $n!$

نشان دهنده حاصلضرب اعداد صحیح مثبت است، به طوری که هر عدد در عدد صحیح قبل از خود ضرب می شود. این عمل تا رسیدن به عدد یک ادامه پیدا می کند.

مثال: به چند روش می توان ۴ نوع کتاب را کنار هم چید؟ $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

فرمول ترکیب: زمانی به کار می رود که ترتیب چیدن افراد یا اشیاء برای ما مهم نیست. ترکیب abc با cba فرقی نمی کند.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نکته: باید ایتیم ها متفاوت باشند. اگر مشابه باشند از این قاعده استفاده نمی شود.

ما باید r مورد را از n آیتیم انتخاب کنیم (بدون جایگزینی)

مثال: ۶ نفر می خواهند دو به دو کنار هم بنشینند. این که چه افرادی کنار هم بنشینند، مهم نیست. تعداد حالت های ممکن برای نشستن را محاسبه کنید.

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!(4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 5$$

فرمول ترتیب: زمانی بکار می رود که ترتیب قرار گرفتن موارد برایمان مهم است.

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: ۶ نفر می خواهند دو به دو کنار هم بنشینند. این که چه افرادی کنار هم بنشینند، مهم است. تعداد حالت های ممکن برای نشستن را محاسبه کنید.

$$A_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 30$$

بسط دو جمله ای نیوتن (پاسکال)

$$[p + q]^n = p^n + c.p^{n-1}.q + c.p^{n-2}.q^{n+1} + \dots q^n$$

شرایط استفاده

۱- آزمایش ها فقط نشان دو نتیجه پیروزی و شکست باشد. $P+q=1$

۲- آزمایش ها مستقل از هم باشند.

۳- تعداد دفعات کوشش مشخص باشد.

هنگام مواجه با مجموعه ای از پرسش های مشابه زیر از بسط دو جمله ای که راحتتر است استفاده کنید :

مثال: در امتحان ۳ سؤالی، ۴ جوابی، احتمال اینکه دانش آموزی بصورت تصادفی به یک سؤال پاسخ دهد چقدر است؟

$$\frac{1}{4}, q = \frac{3}{4} \rightarrow (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + q^4 = 1$$

-احتمال اینکه به همهی سؤال ها از روی شانس پاسخ درست دهد برابر است با : $p^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

-احتمال اینکه به دو سؤال پاسخ درست دهد برابر است با : $2p^2q^1 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$

-احتمال اینکه به یک سؤال پاسخ درست دهد برابر است با : $3p^1q^2 = 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$

-احتمال اینکه اصلاً پاسخ درست ندهد برابر است با : $q^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

-احتمال اینکه حداقل به یک سؤال پاسخ درست دهد چقدر است؟

$$p^3 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 = \left(\frac{1}{64}\right) + \left(\frac{9}{64}\right) + \left(\frac{27}{64}\right) = \frac{37}{64}$$

فرمول میانگین در توزیع دو جمله ای $\bar{x} = P \cdot n$

n: تعداد دفعات تکرار آزمایش

p: احتمال پیروزی

مثال: اگر سکه ای ده بار پرتاب شود، میانگین آن چقدر است؟ $\bar{x} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

فرمول خطای استاندارد برآورد در توزیع دو جمله ای: $S_f = \sqrt{N \cdot p \cdot q}$

مثال: اگر در امتحان ۱۰ سؤالی شرکت کرده باشیم و امتحان ۴ گزینه ای باشد، خطای استاندارد برآورد آن را محاسبه نمایید:

$$S_p = \sqrt{10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{30}{16}} = 1/37$$

انواع تحلیل داده ها

تحلیل داده های کیفی: مستلزم سه فعالیت است:

۱- **تلخیص داده ها:** که منظور انتخاب، تمرکز، تنظیم و تبدیل داده ها است. رمزگذاری داده ها و اینکه پژوهشگر مشخص کند چه قسمتی از داده ها مفید و چه قسمتی نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد در این بخش قرار دارد.

۲- **عرضه داده ها:** منظور ظاهر ساختن مجموعه های از داده های سازمان یافته است. مانند مطالب روزنامه، رایانه. شکل رایج عرضه داده های کیفی در گذشته استفاده از متن های داستان گونه بوده است.

۳- **نتیجه گیری/تأیید:** پی بردن به معنای هر رویداد، الگوهای وقوع آنها، تبیین آنها. با نتیجه گیری نمی توان فعالیت پژوهشی را پایان یافته تلقی کرد. زیرا این فعالیت باید مورد تأیید واقع شود. یعنی باید از جنبه موجه بودن، استحکام و قابلیت تأیید مورد بازبینی قرار گیرد. این فرایند همان تعیین اعتبار نتایج است.

تحلیل داده های کمی: چنانچه داده ها کمی و پیوسته باشند، دارای توزیع بهنجار بوده و آزمودنی ها با نمونه گیری تصادفی انتخاب شده باشند، برای تحلیل داده ها می توان از آزمون های پارامتری استفاده کرد. این آزمون ها دارای مفروضه های نرمال بودن توزیع نمرات، یکسانی واریانس در گروه ها و داشتن مقیاس فاصله ای و نسبتی و پیوسته بودن داده ها است. مانند آزمون t . اگر این مفروضه ها وجود نداشته باشند، باید از آزمون های غیر پارامتری که با متغیرهای اسمی و رتبه ای سروکار دارد استفاده کرد. در مواردی که مقیاس فاصله ای است، ولی حجم نمونه کوچک است نیز از آزمون های ناپارامتری استفاده می شود.

نکته: در تحلیلهای پارامتری می توان پارامترهای جامعه را برآورد کرد، درحالیکه در تحلیلهای ناپارامتری فقط آزمون فرض صورت می گیرد.

بخش چهارم: منابع مطالعاتی پیشنهادی سرفصل ریاضیات و آمار مقدماتی

ریاضیات و آمار، شامل موارد زیر می گردد:

۱. مجموعه ها	۱۰. لگاریتم
۲. حل مسائل جبری و کسری	۱۱. حد و پیوستگی
۳. دنباله	۱۲. انتگرال
۴. معادله خط	۱۳. مساحت ها
۵. نامعادله	۱۴. انواع متغیرهای آماری
۶. ریشه های معادله درجه دوم و سوم	۱۵. شاخص ها
۷. تابع	۱۶. پیشامد
۸. برد تابع	۱۷. نمودارهای آماری
۹. دامنه تابع	۱۸. رگرسیون
	۱۹. احتمال
	۲۰. پیشامدها

دو کتاب در این سرفصل بسیار مورد استفاده قرار می گیرد:

۱. کتاب آمادگی برای آزمون های استخدامی ریاضیات و آمار انتشارات امید انقلاب
۲. کتاب ریاضیات مدرسان شریف (در صورت موجود بودن زمان کافی)